

事象の地平線を持たない球対称な厳密解の 一例と重力消失についての理論的考察

田邊一郎* ・ 小棹理子**

*埼玉医科大学保健医療学部臨床工学科

**湘北短期大学総合ビジネス・情報学科

要約. 従来のリーマン幾何学を用いた手法ではなく、クルスカール・スゼッケル座標（以下、クルスカール座標）からシュバルツシルド解を導出する方法の拡張をおこない、球対称な新しい厳密解（R(Ryskmit)解）を得た。この解の特徴は、原点以外に特異点を持たず“事象の地平線”も存在しないため、外部から情報を取り出せないブラックホールは考える必要のない厳密解で、遠方ではシュバルツシルド解と近似的に一致する。また、解の特徴は、シュバルツシルド半径で重力は極大となり、その半分の距離で重力のないミンコフスキー空間に移行するため、この間において重力は次第に減少するものである。重力が減少すれば慣性質量との解離、すなわち“等価原理の破れ”が生じる可能性があり、慣性質量のみが残るのか、あるいは慣性質量も減少して物質は光と同等になるのか、最近、注目されるガンマ線バーストに必要な十分なエネルギーが得られる点と合わせて興味深い結果が導かれた。さらに、この解の計量は、ノルドシュトルム解とも極めて類似し、双方が一致するプランク単位系の大きさにおいて、電荷の有無によって 2 種類の質量が現れることが示される。これはダークマターの疑問を解き明かす上でも重要な関係と考えられる。以上のように、この厳密解は、宇宙物理学のみならず、素粒子論や統一理論についても新しい知見を導く有用な基礎方程式となりうる可能性がある。

1. 緒言

最近、ブラックホールの理論は著しく進み、重力波の観測[1]や降着円盤の画像[2]など観測面からもその存在が確実視されつつある。その一方でブラックホール内面の構造やガンマ線バーストなどまだまだ未解決な問題が多く存在することもまた事実である。それに加えて暗黒物質や暗黒エネルギーなど理論上からもその実体さえ明かでない物理学の根幹に関わる問題が横たわっているのは物理学者の焦燥感もさることながら、新しい物理学への予感を醸し出し、むしろ興奮を覚えるのはひとり筆者だけではあるまい。

この理論的な閉塞感の原因の一つとしてブラックホールの理論モデルの多くがシュバルツシルド解[3]（さらにその拡張であるカー解[10]）に頼っていることが挙げられる。確かにシュバルツシルド解は最も簡単なモデルではあるが、“事象の地平線”や内部重力の無限大をきたす“真性特異点”の問題を内包し未だブラックホール内部の謎を解く満足な解とはいえない。

本研究では、クルスカール座標[4]を応用して、その数学的方法に単純な拡張をおこなうことによってシュバルツシルド解に類似したひとつの球対称な厳密解が得られることを示し、この解がもたらす様々な時空に対する特徴や若干の新しい知見を報告する。たとえば、この解を用いれば、“事象の地平線”は存在せず連続的にブラックホール内部に到るとともに次第に重力は減少し、シュバルツシルド半径の半分の地点において重力は完全に消失しミンコフスキー空間に移行することが示される。これはブラックホール内の情報が外部に温存

されるとともに、いわゆる強い等価原理 (Strong equivalence principle, SEP) [5]に関わる大きな問題でもあり、宇宙論の新たな可能性を提示するものである。

2. 方法および結果

クルスカール座標[4]は、ブラックホールの外部解を効率よく説明する座標系であり、次のように表される。ただし、計量の符号は (−+++) を採用した。

$$\begin{aligned} ds^2 &= f(r,t)^2(du^2 - dv^2) + r^2 d\Omega^2 \\ &= f(r,t)^2(g'(r)^2 dr^2 - g(r)^2 h'(ct)^2 c^2 dt^2) + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$

$$u(r,t) = g(r) \cosh h(ct), \quad v(r,t) = g(r) \sinh h(ct) \quad (2)$$

である。

これが任意な関数を $A(r)$ として

$$ds^2 = -A(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{A(r)} dr^2 + d\Omega^2 \quad (3)$$

の型を持つとすると

$$u = \left(\frac{r}{\alpha} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp \frac{r}{2\alpha} \cosh \frac{ct}{2\alpha}, \quad v = \left(\frac{r}{\alpha} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \exp \frac{r}{2\alpha} \sinh \frac{ct}{2\alpha}, \quad f(r)^2 = \frac{4\alpha^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{\alpha}\right)$$

の場合に、シュバルツシルド解

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad \alpha = \frac{2GM}{c^2} \quad (4)$$

が得られる。

これは

$$\begin{aligned} g(r) &= (ar + b)^{\frac{1}{2}} \exp \frac{r}{2a}, \quad h(ct) = \frac{ct}{2a}, \quad \alpha = \frac{2GM}{c^2}, \quad f(r)^2 = \frac{4a^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \\ a &\neq 0, \quad a, b = \text{const.} \end{aligned} \quad (5)$$

とおき、 $du^2 - dv^2$ で計算される dr^2 の計量の分子部分において、 r^{\square} の最高次以外の係数はすべて 0 であると仮定することにより、その唯一の解として得られる。

ここで、(5) のさらなる一般化をこころみ

$$g(r) = (ar^2 + br + d)^{\frac{1}{2}} \exp \frac{r}{2a}, \quad h(ct) = \frac{ct}{2a}, \quad f(r)^2 = \frac{4a^2}{ar^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

$$a \neq 0, \quad a, b, d = \text{const.} \quad (6)$$

とおき、(5) と同じく、 $du^2 - dv^2$ で計算される dr^2 の計量の分子部分において、 r^{\square} の最高次以外の係数はすべて 0 であると仮定し、(1) に従って簡単な計算をおこなうと

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2a}{r} + \frac{2a^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2a}{r} + \frac{2a^2}{r^2}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (7)$$

が得られる。これは (6) の条件を満たす唯一の解ともなっている。(以下、これを仮に R 解

(Ryskmit solution)と名付けておこう。

もし、遠方においてシュバルツシルド解と一致するよう条件をつければ

(7) 式の定数 α は

$$\alpha = \frac{GM}{c^2} \quad \text{と置くのが妥当であろう。}$$

さらに (7) の計量を用いて、アインシュタイン方程式を解くと、アインシュタインテンソルを

$$G_k^i = R_k^i - \frac{1}{2}g_k^i R \quad \text{として}$$

$$G_0^0 = G_1^1 = \frac{4\alpha^2}{r^4}, \quad G_2^2 = G_3^3 = -\frac{4\alpha^2}{r^4} \quad (8)$$

が得られる。[15]

3.考察

i) クルスカル座標の汎用性について

本論文で使ったクルスカル座標は、この形式を満足する多くの厳密解を統一的に記述することが可能である。

たとえば

$$g(r) = \sqrt{\frac{1+\alpha r}{1-\alpha r}}, \quad h(ct) = \alpha ct, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad f(r)^2 = \frac{(1-\alpha r)^2}{\alpha^2} \quad (9)$$

とおけば、ドジッター宇宙の計量[6]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)c^2 dt^2 + \frac{1}{1-\frac{\Lambda}{3}r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (10)$$

が得られる。これは(3)式も満足する。

また

$$g(r) = \exp(\sin^{-1}\sqrt{K}r), \quad h'(ct) = \frac{\partial h(ct)}{\partial ct}, \quad a(ct) = \frac{1}{h'(ct)}, \quad f(r)^2 = \exp(-\sin^{-1}\sqrt{K}r) \quad (11)$$

とおけば

$$ds^2 = -h'(ct)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2$$

となり、さらに

$$\frac{ds^2}{h'(ct)^2} \Rightarrow ds^2$$

と置き直せば、ロバートソン・ウォーカー型計量[7]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(ct)^2 \left(\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (12)$$

が得られる。この場合は必ずしも(3)式を満たさなくても、クルスカール座標を応用できる一例である。

特殊な場合として

$$u = \exp \frac{r}{2\alpha} \cosh \frac{ct}{2\alpha}, \quad v = \exp \frac{r}{2\alpha} \sinh \frac{ct}{2\alpha}, \quad f(r)^2 = \exp \left(-\frac{r}{\alpha} \right) \quad (13)$$

の場合はミンコフスキー空間を、特に $f(r)^2 = 1$ の場合はリンドラー座標系[8]を表すことができる。

さらに、(4)において、 h が、 r と t の関数と仮定すると

$$u(r, t) = g(r) \cosh h(ct, r), \quad v(r, t) = g(r) \sinh h(ct, r) \quad (14)$$

$$h(ct, r) = \frac{ct}{2\alpha} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{r}{\alpha} - 1 \right) \Rightarrow \frac{ct'}{2\alpha}$$

と変換すれば、エディントン形式[9]が得られる。これからカー解[10]に到ることができる。[11]

以上のようにクルスカール座標はクリストッフェル記号を使用せずにシュバルツシルド解や他の様々な球対称な厳密解を導く簡便な統一的方法であり、この方法で導出できる形式を仮りに“クルスカール形式”と名付けておく

今回、導いたR解もこの条件を満足する最も簡単な計量のひとつにすぎないが、今まで知られている物理現象をよく説明し、リーマン幾何学を用いて導かれるシュバルツシルド解を含む“自然な形”での拡張が特徴であり、その萌芽はエディントンの著作の中にもすでに見られる[12]。また、最近、一般相対論の修正を巡って議論されるPPN (parametrized post Newtonian formalism)[13]の計量とも類似しているのも特徴である。確かに時間の計量はほぼ一致しているが空間部分は等方座標を用いた近似的な要素が強く、厳密解であるR解の計量を用いて議論されたことはなく、このR解を等方座標に変換することによりPPNの新たな発展も期待できる。

ii) R解によるブラックホール時空の特徴

R解の計量は、遠方ではシュバルツシルド解に近似できるものの、シュバルツシルド半径内部の空間構造が双方で著しく異なり、ブラックホール形成に必要な事象の地平線が存在しないことが最大の特徴である。これは $A(r) = 1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{2\alpha^2}{r^2}$ が常に正値を取り $r = 0$ 以外では特異点を有しないからである。(事象の地平線が存在しない構造をブラックホール

と呼ぶかどうかは議論の余地があるが、本論文ではシュワルツシルド内側の時空を便宜上、ブラックホールと呼ぶことにする。) 事象の地平線がなければ、シュバルツシルド半径内の情報が外部に取り出せることを示しており、ブラックホール内外におけるエネルギー保存則も成立するということである。R 解の $A(r)$ の値は、図 1 のように、シュバルツシルド半径 $r = 2\alpha$ で極小値の $\frac{1}{2}$ となり r が減少するに従い再び上昇し $r = \alpha$ で 1 となる。これはシュバルツシルド半径の半分で重力による空間の歪みは消失し、ミンコフスキー空間と同じ状態になるということである。つまりシュバルツシルド半径内のブラックホールでは重力が次第に減少し、遂には重力が消失するということを示している。重力が弱まれば重力質量も変化し、ブラックホール内では慣性質量と重力質量に解離が生じる可能性が示唆される。これまでも、事象の地平線を必要としないシュバルツシルド解とドジッター解を組み合わせたグラバスターモデル[14]や、2 次の r^{-2} 項を考慮したブレーンワールドブラックホール[15]など多彩な“疑似ブラックホール”モデル[16]が提唱されているが、シュバルツシルド半径内で重力が減少し、 r^{-2} の項を確定させた単一連続関数の厳密解の報告はなく、重力減少に起因するさまざまな新しい展開が期待される。

そのまず第一は、この解は“等価原理の破れ”を示唆する大きな問題を提起する。この破れによって重力質量が弱まり慣性質量が残れば、エネルギー保存則によってその運動エネルギーは増大し、それがブラックホールの外部から加わる重力質量を凌駕すればブラックホール内部からの爆発的な破壊がおこる可能性もある。宇宙最大の爆発現象であるガンマ線バーストも、宇宙が現在よりも小さな時代に、星を形成する巨大な 2 つの質量の不均衡が原因しているのではないだろうか？ ちなみに、太陽程度の恒星がその慣性質量をすべてエネルギー E に変換したとすると

$$E = mc^2 \sim 2 \times 10^{30} \times (3 \times 10^8)^2 \sim 2 \times 10^{47} J$$

と十分なエネルギーを供給しうることを示しており、その爆発的な現象とともに R 解を用いて説明が可能となるのは極めて興味深い。

逆に、“等価原理の破れ”が存在しないとすると、重力質量とともに慣性質量も減少し、ついには質量が 0 の状態、つまり物質はすべて光に変換されることになる。つまり、ブラックホール内部がミンコフスキー時空に近づくにつれその近傍は輻射優位になることから、その強大な輻射圧によって内部は暗黒な世界ではなくむしろ球殻状に光を放出していると考えられる。R 解は“事象の地平線”が存在しないのであるから、その光がシュバルツシルド半径の外側に放出され、降着円盤の内側に観測される可能性がある。最近、国際研究チームが電波望遠鏡で初めてブラックホールの降着円盤が撮影されたが[2]、その円盤の内側に荷電粒子のシンクロトロン輻射とは異なる種類の輻射が観測されるかもしれない。ブラックホール内の今後の詳細な観測が求められる。

さらに穿って考えれば、R 解は $r = 0$ の真性特異点においては $A(r)$ は無限大に発散してしまうが、一方でシュバルツシルド半径内の重力の減少は、チャンドラセカール限界[17]を超えても、外部からの強大な重力を内部の空間構造が支える可能性を示しており、

最終的にはミンコフスキー空間に起因する新しい“輻射圧”によって $\alpha < r < 2\alpha$ の間で平衡を維持するモデルを構築できるかもしれない。重力が消失するミンコフスキー空間が介在するために、空間が $r = \alpha$ を超えて収縮できるかどうかははなはだ疑問であり、その意味においては $r < \alpha$ の状態や $r=0$ の真性特異点は、単なる数学上の存在に過ぎないのかもしれない、物質が吸い込まれるだけの従来のブラックホールの概念は大きく修正が必要となるだろう。

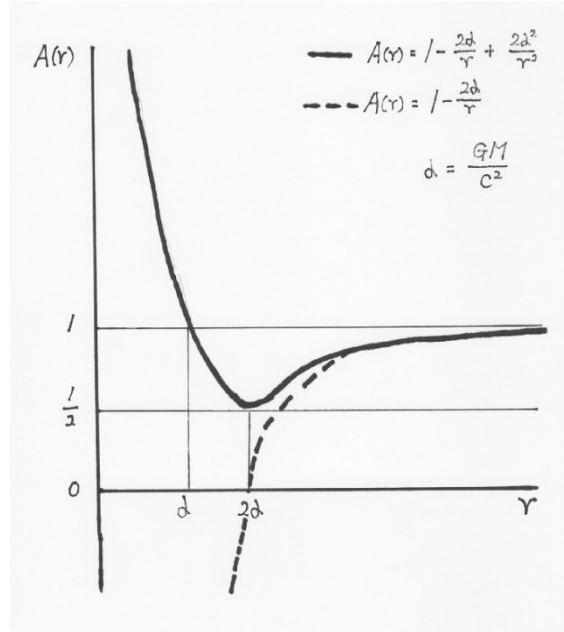


図1. シュバルツシルド解と R 解における関数 $A(r)$ と 距離 r のグラフ

一方で、R 解はシュバルツシルド半径内では空間に大きな影響を与えるが、距離 r が大きくなるに従って r^{-2} 項は急速に減少し、次第にシュバルツシルド解に近似できるようになる (図1)。これは、R 解の影響が主にシュバルツシルド半径内に限局され、広範囲な星間空間では従来のシュバルツシルド解で議論しても差し支えないことを示している。

そこで、シュバルツシルド半径近傍での R 解における物質の軌道を求めると、シュバルツシルド解のテスト粒子 m の運動を参考にして[11]

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{L_\varphi^2} \left[\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{2\alpha^2}{r^2}\right) \left(\frac{L_\varphi^2}{r^2} + m^2 c^2\right) \right] \quad (15)$$

$$\text{ただし、} \frac{E}{c} = m \left(1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{2\alpha^2}{r^2}\right) ct, \quad L_\varphi = -mr^2 \dot{\varphi}, \quad \alpha = \frac{GM}{c^2} \quad (16)$$

である。 $u \equiv \frac{1}{r}$ を用いて変形し、 φ で微分すると、 $a = \frac{L_\varphi}{m}$, $h = \frac{a^2}{GM}$ として

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left(1 + \frac{2\alpha}{h}\right)u = \frac{1}{h} + 3\alpha u^2 - 4\alpha^2 u^3 \quad (17)$$

が得られる。

水星など、弱い重力場の近日点移動の場合は、 $r \gg \alpha$, $h \gg \alpha$ であるから (17)式の左辺の $\frac{2\alpha}{h}$ は無視し、右辺の u^2 の項までで近似される。これは、アインシュタインの導いた式[18]である。しかし、さらに強い重力場ではその他の項が影響を及ぼす可能性があることをR解は示している。今後、たとえば銀河系中心の強力な重力源である S g r A⁺ を巡る恒星の運動[19]がどのような近日点移動を示してゆくのか、アインシュタインの示した近日点移動と誤差を生じていくかどうかなど、今後の長期にわたる観測によって新しい知見が得られることが期待される。

iii) R解とライスナー・ノルドシュトルム解[20][21]との類似性

R解はその形がライスナー・ノルドシュトルム解(18)と非常に類似している。

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{Ge^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{Ge^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (18)$$

ただし、 ϵ_0 は真空の誘電率、 e は電荷、 $\alpha = \frac{GM}{c^2}$ である。

また、双方のアインシュタイン・テンソル G_k^i [15]も、定数を除くと完全に一致している。(8)式参照)

これら同じ構造を持つふたつの解が完全に一致すると仮定すると、違いがあるのは r^{-2} の項だけであるから

$$2 \frac{G^2 M^2}{c^4 r^2} = \frac{Ge^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2} \quad \text{より} \quad 2 \frac{GM^2}{r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{と重力とクーロン力を思わせる関係式が出てくる。}$$

る。

さらに変形すると、 r とは無関係な

$$M = \sqrt{\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 G}}, \quad (M > 0) \quad (19)$$

の関係式を得る。

ここで、やや大胆な変形を施すと

$$M = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \alpha \cdot M_p \quad (20)$$

ただし α は微細構造定数、 M_p はプランク質量である。

ライスナー・ノルドシュトルム解は1個の電荷に対する厳密解なので、量子力学的なレベルにおいて、R解との間に2つの異なる質量が現れることになる。これが何を意味するものなのだろうか、2つの解を同一視していいのかわかるとは未だ明らかではないが、(20)式の定数部分を計算すると

$$M \sim 0.06 M_p$$

であり、プランク質量の数パーセントが R 解の質量となる。つまり、プランク質量に電荷が作用すると、数パーセント程度の小さな質量に置換されるということである。これはダークマター [22][23] を説明するひとつの仮説となり得ないだろうか？「電荷」は、そこに必ず粒子を伴って存在する物理学的概念であるが、素粒子的な大きさではそれぞれが作用しあって質量を変化させる作用素的な役割を有しているのかもしれない。ただ、ライスナー・ノルドシュトルム解は、静止した 1 個の電荷のみを仮定した時空で、磁場や電磁場の相互的な作用は仮定に入っておらず、それらを盛り込んださらに一般的な解を求めていく必要があるだろう。

iv) 宇宙論への一つの応用

R 解を用いて宇宙論を展開するのはまだまだ考慮すべき点が多いが、 R 解にはミンコフスキー空間に移行する距離 r が、シュバルツシルド半径の半分と、無限大の距離において 2 点存在することは非常に大きな意味を有している。この距離において、その双方を区別する方法は存在するのであるだろうか？時空が同じでありエネルギーが保存されているならば、双方の空間は一致しているということにならないだろうか？この特徴は、「共形巡回宇宙論」(Conformal Cyclic Cosmology) [24] の説くところと類似しており、「我々のビッグバンの過去に横たわっていたものが、“前の宇宙”の無限の未来である」ということを示しているのではないだろうか？数学的な解析接続によって最大と最小が同じであるという概念は非常に興味深いものではあるが、この議論をさらに進めるには R 解のような時間的に定常な空間では不十分であり、本論文では、 R 解の無限大の空間はその空間の最も微小な状態（シュバルツシルド半径の半分程度）と空間的に同一である、ということに止めておくことにする。

4. 結論

- 1) 一般相対論で応用されるクルスカール座標のシンプルな拡張をおこない、シュバルツシルド解とは異なる、新しい厳密解 (R 解) を見出した。
- 2) この計量の最大の特徴は、遠方ではシュバルツシルド解に近似できるが、シュバルツシルド半径における“事象の地平線”はなく、したがってその内部の情報を外部に取り出せることで、従来のブラックホールとは異なるものである。
- 3) R 解の計量がミンコフスキー計量と一致する r は、無限大とシュバルツシルド半径の半分の 2 点が存在する。このことはシュバルツシルド半径内においては重力が次第に減少し遂には消失することを示唆している。つまり、強力な重力源においては“等価原理の破れ”をきたす可能性がある。
- 4) R 解の物体の運動は、シュバルツシルド半径の近傍において、アインシュタインの近日点移動とは誤差を生じることが示唆される。
- 5) R 解は、ライスナーノルドシュトルム解と非常に類似しており、その空間構造は同じ

であるとみなされる。両者が完全に一致する場合には、電荷を通じて 2 つの質量が存在することが示され、ダークマターの問題にも一石を投じるものである。

5) 以上のように、R 解のさらなる解析は、宇宙物理学のみならず素粒子論や統一場理論にも多大の貢献ができると期待される。

Acknowledgements

多くの御助言を頂いた埼玉医科大学の諸先生には厚くお礼申し上げます。さらに宇宙物理学が専門ではない私を、様々な面から援助し支えてくれた友人たち、特に、藤本幸司、瀬戸康雄、多田昌司、中藤智子、さらに妻である田邊美温に感謝する。

References

[1] Abbott. B. P. et al. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral” (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Phys. Rev. Lett. 119, 161101 – Published 16 October 2017

[2] Akiyama K. et al. “First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole” (The Event Horizon Telescope Collaboration). The Astrophysical Journal Letters, 875:L1 (17pp), 10 April 2019

[3] Schwarzschild K. “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie”. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 7: 189–196. 1916

[4] Kruskal M. “Maximal extension of Schwarzschild Metric”. Phys. Rev., 1960, v.119, no.5, 1743–1745.

[5] Ransom S.M.; et al. "A millisecond pulsar in a stellar triple system". Nature. 505 (7484): 520–524. 2014

[6] de Sitter, W. “Einstein’s Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences”, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 78: 3–28. 1917

[7] Robertson H.P. "Kinematics and World-Structure," Astrophys. J., 82, 284-301, 1935

[8] Rindler, W. “Kruskal Space and the Uniformly Accelerated Frame”. Am.J. Phys. 34,

1174-1178. 1966

[9] Eddington, A. S. "A Comparison of Whitehead's and Einstein's Formulae", *Nature*, 113, 192. 1924

[10] Kerr R. "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics", *Physical Review Letters* 11 237-238.1963

[11] for example. Adler R., Bazin M. and Schiffer M. "Introduction to General Relativity", Mc.Graw-Hill 199-209,237-274. 1965.

[12] Eddington,A.A. "The Mathematical Theory of Relativity". Cambridge, Cambridge University Press. 104-106. 1923

[13] for example. Stephani H. "General Relativity". Cambridge, Cambridge University Press. 136-137. 1982

[14] Mazur P. and Mottola E. "Gravitational Condensate Stars: An Alternative to Black Holes". *Proc. Natl. Acad. Sci.* 101, p. 9545. 2004

[15]Dadhich N., Maartens R., Papadopoulos P. and Rezanian V. "Black holes on the brane".*Phys. Lett.B* 487,1. 2000

[16] Lemos J.P.S. and Zaslavskii O.B. "Truly naked black holes and quasi-black holes"*Phys. Rev. D* 76, 084030 (2007).

[17] Chandrasekhar, S. (July 1931). "The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs". *Astrophys. J. (IOP Publishing)* 74: 81-82.

[18] Einstein.A. "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie." *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften.* Seite 831~839. 1915

[19] Schödel, R. et al. "Closest Star Seen Orbiting the Supermassive Black Hole at the Center of the Milky Way". *Nature*, 419, 694-696. 2002

- [20] Reissner, H. "Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie". *Annalen der Physik* (in German). 50: 106–120. 1916
- [21] Nordström, G. "On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory". *Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam*. 26: 1201–1208. 1918
- [22] Zwicky, F. "Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln". *Helvetica Physica Acta* 6: 110–127. 1933
- [23] Rubin V.C. and Ford W.K., Jr. "Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions". *Astrophysical Journal* 159: 379. 1970
- [24] Gurzadyan, V.G. and Penrose, R. "On CCC-predicted concentric low-variance circles in the CMB sky". *Eur. Phys. J. Plus*. 128 (2): 22. 2013