目　次

表紙デザイン：内行花文鏡（古墳時代）

Ａ－１．数学的基礎

本物理学的方法は、単一の ４×４行列によってのみ記述される。

その性質は、四元数に一致し、最も簡単なspinorの方法に類似している。

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ -b' & a' & d' & -c' \\ -c' & -d' & a' & b' \\ -d' & c' & -b' & a' \end{pmatrix}$$

とすると

$$AB=\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ -q & p & s & -r \\ -r & -s & p & q \\ -s & r & -q & p \end{pmatrix}=C$$

ただし

$$p = aa' - bb' - cc' - dd'$$

$$q = ab' + ba' - cd' + dc'$$

$$r = ac' + bd' + ca' - db'$$

$$s = ad' - bc' + cb' + da'$$

特にＢの転置行列を B^t とした場合

$$p = aa' + bb' + cc' + dd'$$

$$q = -ab' + ba' + cd' - cd'$$

$$r = -ac' + ca' + db' - bd'$$

$$s = -ad' + da' + bc' - cb'$$

であり、これは Eulerの恒等式に他ならない。

行列式の性質から、当然のこととして

$$|A|\,|B| = |C|$$

がなりたつ。

すなわち

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)^2=(p^2+q^2+r^2+s^2)^2$$

である。

ここで、ｂ→ｉｂ、ｃ→ｉｃ、ｄ→ｉｄなどに変換すると

次の基本的な行列を得る。

$$A = \begin{pmatrix} a & ib & ic & id \\ -ib & a & id & -ic \\ -ic & -id & a & ib \\ -id & ic & -ib & a \end{pmatrix} \qquad (A-1-1)$$

$$|A| = (a^2 - b^2 - c^2 - d^2)^2 \qquad (A-1-2)$$

ＡはHermite行列であり、Ａ＊＝Ａである。

（今後、A-1-2式の右辺における括弧外の２乗は省略する。）

記法を簡単にするために

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A-1-3)$$

とおく。

これは、Dirac行列の記法に基ずく。（符号が±逆転するが差し支えない。）

$$\sigma_2^2 = \gamma_1^2 = \gamma_3^2 = I$$

$$\sigma_2\gamma_1 = -\gamma_1\sigma_2 = i\gamma_3 \qquad \gamma_1\gamma_3 = -\gamma_3\gamma_1 = i\sigma_2 \qquad (A-1-4)$$

$$\gamma_3\sigma_2 = -\sigma_2\gamma_3 = i\gamma_1$$

この性質は、Pauli行列とまったく同じで、Pauli行列の四次元表現といえるが、unitary行列は仮定しない。Hermiteのみで十分である。また、空間の等方性を強調できる点で有利である。

（A-1-1）の略記として次の２通りを用いる。

$$A = aI + b\sigma_2 + d\gamma_1 + c\gamma_3$$

あるいは $\qquad (A-1-5)$

$$A = (a, b, d, c)$$

後者の演算則＊は次のようになる。

$$(a, b, d, c) * (a', b', d', c') = (p, q, s, r)$$

ただし

$$\begin{aligned} p &= aa' + bb' + cc' + dd' \\ q &= ab' + ba' + i(dc' - cd') \\ s &= ad' + da' + i(cb' - bc') \\ r &= ac' + ca' + i(bd' - db') \end{aligned} \qquad (A-1-6)$$

Ｂ－１．x-軸方向のLorentz変換

$$A = ct + x\sigma_2 + z\gamma_3 + y\gamma_1$$
$$A' = ct' + x'\sigma_2 + z'\gamma_3 + y'\gamma_1$$
$$U = \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}}(1+\phi\sigma_2) \qquad V = \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}} = \frac{1}{\sqrt{|1+\phi\sigma_2|}}$$
$$A' = UAU \qquad (B-1-1)$$

とおく。Ｖは単なる規格化定数である。簡単な計算から

$$\begin{aligned} A' &= V^2(1+\phi\sigma_2)(ct + x\sigma_2 + z\gamma_3 + y\gamma_1)(1+\phi\sigma_2) \\ &= V^2\{(ct+\phi x) + (x+\phi ct)\sigma_2 + (z+i\phi y)\gamma_3 + (y-i\phi z)\gamma_1\}(1+\phi\sigma_2) \\ &= \left(\frac{1+\phi^2}{1-\phi^2}ct + \frac{2\phi}{1-\phi^2}x\right) + \left(\frac{2\phi}{1-\phi^2}ct + \frac{1+\phi^2}{1-\phi^2}x\right)\sigma_2 + z\gamma_3 + y\gamma_1 \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1+\phi^2}{1-\phi^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \frac{2\phi}{1-\phi^2} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (B-1-2)$$

とおくと

$$ct' = \frac{ct+\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$x' = \frac{x+\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (B-1-3)$$
$$z' = z$$
$$y' = y$$

が得られる。

これは、-x方向への運動のLorentz変換に他ならない。

従って、x方向は

$$A' = U^t A U^t$$

であらわされる。

y-軸，z-軸方向についても同様にあらわされる。

$$U^2 = \frac{1}{1-\phi^2}(1+\phi\sigma_2)^2 = \frac{1+\phi^2}{1-\phi^2} + \frac{2\phi}{1-\phi^2}\sigma_2$$

であるから

$$\cosh\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\phi^2}{1-\phi^2}$$

$$\sinh\chi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2\phi}{1-\phi^2} \qquad (B-1-4)$$

となり、これはよく知られた関係式である。
したがって、ϕ は β のパラメータ表現ということができる。

B－2．x-軸方向の加法定理

$$U = \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}}\ (1+\phi\ \sigma_2)$$

$$U' = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}}\ (1+\psi\ \sigma_2)$$

とおくと

$$U'' = U\ U'$$

もまた X-軸方向のLorentz変換である。

$$U'' = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\ (1+\eta\ \sigma_2)$$

とすると

$$U\ U' = \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}}\ \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}}\ (1+\phi\ \sigma_2)\ (1+\psi\ \sigma_2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}}\ \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}}\ \{(1+\phi\psi)+(\phi+\psi)\sigma_2\}$$

$$= \frac{1+\phi\psi}{\sqrt{1-\phi^2}\sqrt{1-\psi^2}}\ \left(1+\frac{\phi+\psi}{1+\phi\psi}\ \sigma_2\right)$$

$$\frac{1+\phi\psi}{\sqrt{1-\phi^2}\sqrt{1-\psi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\phi+\psi}{1+\phi\psi}\right)^2}}$$

であることは、容易にしめされるので

$$\eta = \frac{\phi+\psi}{1+\phi\psi} \qquad (B-2-1)$$

の関係をえる。また、

$$\beta'' = \frac{2\eta}{1+\eta^2} = \frac{\dfrac{2(\phi+\psi)}{1+\phi\psi}}{1+\left(\dfrac{\phi+\psi}{1+\phi\psi}\right)^2}$$

$$= \frac{2(1+\phi\psi)(\phi+\psi)}{(1+\phi^2+\psi^2+\phi^2\psi^2)+4\phi\psi}$$

$$= \frac{2\phi(1+\psi^2)+2\psi(1+\phi^2)}{(1+\phi^2)(1+\psi^2)+4\phi\psi} = \frac{\dfrac{2\phi}{1+\phi^2}+\dfrac{2\psi}{1+\psi^2}}{1+\dfrac{2\phi}{1+\phi^2}\dfrac{2\psi}{1+\psi^2}}$$

$$= \frac{\beta+\beta'}{1+\beta\beta'} \qquad (B-2-2)$$

これは、加法定理に他ならない。

B－3． 斉次 Lorentz変換

x,y,z軸の任意方向の Lorentz変換を求める。

$$A=ct+x\sigma_2+y\gamma_1+z\gamma_3$$
$$A'=ct'+x'\sigma_2+y'\gamma_1+z'\gamma_3$$
$$U=\psi(1+\phi_1\sigma_2+\phi_2\gamma_1+\phi_3\gamma_3) \qquad (B-3-1)$$
$$\psi=\frac{1}{\sqrt{1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2}}$$ とおく。

あきらかに $U^*=U$，$|U^*|=|U|=1$ である。

また

$$UU^*=U^2$$
$$=\psi^2(1+\phi_1\sigma_2+\phi_2\gamma_1+\phi_3\gamma_3)^2$$
$$=\psi^2\{(1+\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)+2\phi_1\sigma_2+2\phi_2\gamma_1+2\phi_3\gamma_3\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(1+\beta_1\sigma_2+\beta_2\gamma_1+\beta_3\gamma_3)$$

とおくと

$$\frac{1+\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2}{1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \frac{2\phi_i}{1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2}=\frac{\beta_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (B-3-2)$$

である。

ただし、$\beta^2=\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\beta_3{}^2$

B－2の場合と同様にして A’は

$$A'=U^tAU^t \qquad (B-3-3)$$

であらわされる。

すなわち

$$A'=\psi^2(1-\phi_1\sigma_2-\phi_2\gamma_1-\phi_3\gamma_3)(ct+x\sigma_2+y\gamma_1+z\gamma_3)(1-\phi_1\sigma_2-\phi_2\gamma_1-\phi_3\gamma_3)$$
$$=\psi^2(P+Q\sigma_2+R\gamma_1+S\gamma_3)(1-\phi_1\sigma_2-\phi_2\gamma_1-\phi_3\gamma_3)$$

ただし

$$P=ct-x\phi_1-y\phi_2-z\phi_3$$
$$Q=x-ct\phi_1-iz\phi_2+iy\phi_3$$
$$R=y-ct\phi_2-ix\phi_3+iz\phi_1$$
$$S=z-ct\phi_3-iy\phi_1+ix\phi_2$$

よって

$$A' = \{(P - Q\phi_1 - R\phi_2 - S\phi_3) + (Q - P\phi_1 - iR\phi_3 + iS\phi_2)\sigma_2$$
$$(R - P\phi_2 - iS\phi_1 + iQ\phi_3)\gamma_1 + (S - P\phi_3 - iQ\phi_2 + iR\phi_1)\gamma_3\}$$

E項；

$$P - Q\phi_1 - R\phi_2 - S\phi_3$$
$$= ct(1 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) - x \cdot 2\phi_1 - y \cdot 2\phi_2 - z \cdot 2\phi_3 \tag{B-3-4}$$

σ_2項；

$$Q - P\phi_1 - iR\phi_3 + iS\phi_2$$
$$= ct(-2\phi_1) + x(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2) + x(2\phi_1^2) + y(2\phi_1\phi_2) + z(2\phi_1\phi_3) \tag{B-3-5}$$

γ_1項；

$$R - P\phi_2 - iS\phi_1 + iQ\phi_3$$
$$= ct(-2\phi_2) + y(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2) + x(2\phi_1\phi_2) + y(2\phi_2^2) + z(2\phi_2\phi_3) \tag{B-3-6}$$

γ_3項；

$$S - P\phi_3 - iQ\phi_2 + iR\phi_1$$
$$= ct(-2\phi_3) + z(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2) + x(2\phi_1\phi_3) + y(2\phi_2\phi_3) + z(2\phi_3^2) \tag{B-3-7}$$

となる。

ここで、(B-3-2)の関係から

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{\beta_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2$$
$$= \frac{(1 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2)^2 - 4\phi_1^2 - 4\phi_2^2 - 4\phi_3^2}{(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2)^2} = \frac{(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2)^2}{(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - \phi_3^2)^2}$$
$$= 1$$

である。

さらに、

$$\beta^2=\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\beta_3{}^2=\left\{\left(\frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2+\left(\frac{\beta_2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2+\left(\frac{\beta_3}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2\right\}(1-\beta^2)$$

$$=\frac{4(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)}{(1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2)^2}\ \frac{(1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2)^2}{(1+\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)^2}=\frac{4(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)}{(1+\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1=\frac{2(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)}{1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2}$$

$$\frac{\beta^2}{2(1-\beta^2)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)}=\frac{1}{2}\ \frac{4(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)}{(1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2)^2}\ \frac{1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2}{2(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)}=\frac{1}{1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2}$$

$$=\psi^2$$

$$\beta_i\beta_j=\frac{4\phi_i\phi_j}{(1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2)^2}(1-\beta^2)=\frac{4\phi_i\phi_j}{(1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2)^2}\ \frac{(1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2)^2}{(1+\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)^2}$$

$$=\frac{4\phi_i\phi_j}{(1+\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)^2}$$

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)\beta_i\,\beta_j=\frac{(1+\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)^2}{4(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)}\ \frac{2(\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)}{(1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2)}\ \frac{4\phi_i\phi_j}{(1+\phi_1{}^2+\phi_2{}^2+\phi_3{}^2)^2}$$

$$=\frac{2\phi_i\phi_j}{1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2}=2\phi_i\phi_j\,\psi^2 \qquad \text{(以上}B-3-8\text{)}$$

以上より

$$ct' = \psi^2\ (B-3-4) = \frac{ct - \beta_1 x - \beta_2 y - \beta_3 z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \psi^2\ (B-3-5) = x + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)(\beta_1{}^2 x + \beta_1\beta_2 y + \beta_1\beta_3 z) - \frac{\beta_1 ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y' = \psi^2\ (B-3-6) = y + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)(\beta_1\beta_2 x + \beta_2{}^2 y + \beta_2\beta_3 z) - \frac{\beta_2 ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$z' = \psi^2\ (B-3-7) = z + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)(\beta_1\beta_3 x + \beta_2\beta_3 y + \beta_3{}^2 z) - \frac{\beta_3 ct}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(以上$B-3-9$)

ここで

$ct = x_0$

$x = x_1$

$y = x_2$

$z = x_3$

とおくと最終的な公式として

$$x_0' = \frac{x_0 - \beta_i x_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x_i' = x_i + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\beta_i\beta_j x_j - \frac{\beta_i x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \left\{\delta_{ij} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\beta_i\beta_j\right\} x_j - \frac{\beta_i x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(以上, $B-3-10$)

をえる。

これは、任意方向の Lorentz変換式である。

（Ｂ－１－４）を参考にして、双曲線関数の表示を用いると

$$s = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \cosh\theta$$

$$t_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sinh\theta\ \alpha_i \quad （ただし\ \alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2=1）$$

とおくと

$$s^2-t_1{}^2-t_2{}^2-t_3{}^2=\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$$

$$\beta_i = \tanh\theta\ \alpha_i$$

である。

また

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} -1 = \cosh\theta - 1$$

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{s^2}{s^2-1} = \coth^2\theta$$

であるから

$$u=\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}-1\right) \quad とおくと$$

$$\begin{aligned} u\beta_i\beta_j &= \coth^2\theta\,(\cosh\theta-1)\ \tanh^2\theta\ \alpha_i\alpha_j \\ &= (\cosh\theta-1)\ \alpha_i\alpha_j \end{aligned}$$

したがって（B−3−10）は

$$x_0' = \cosh\theta\ x_0-\sinh\theta\ \alpha_i x_i$$

$$x_i' = \{\delta_{ij}+(\cosh\theta-1)\alpha_i\alpha_j\}\ x_j - \sinh\theta\ \alpha_i\ x_0$$

（B−3−11）

と書くこともできる。　α_iは、相対速度の方向余弦を示すと考えられる。

Ｂ－４．Lorentz変換の内在的回転性

任意方向のLorentz変換を２回おこなった場合を考える。

$A=ct+x\sigma_2+y\gamma_1+z\gamma_3$

$A'=ct'+x'\sigma_2+y'\gamma_1+z'\gamma_3$

$U=\psi(1+\phi_1\sigma_2+\phi_2\gamma_1+\phi_3\gamma_3)$

$U'=\psi'(1+\phi_1'\sigma_2+\phi_2'\gamma_1+\phi_3'\gamma_3)$

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{1-\phi_1^2-\phi_2^2-\phi_3^2}} \qquad \psi'=\frac{1}{\sqrt{1-\phi_1'^2-\phi_2'^2-\phi_3'^2}}$$

とおく。

Ａが最初にＵにより変換され、次にＵ’で変換されＡ’になったとすると
Ｂ－３の議論により

$$A'=U'^t(U^tAU^t)U'^t \qquad (B-4-1)$$

でしめされる。

行列の結合法則から

$$A'=(U'^tU^t)A(U^tU'^t) \qquad (B-4-2)$$

であり、この変換によってＡ’も四次元形式を保持するはずである。
したがって，斉次Lorentz変換はU'^tU^tを介して完全な運動群を形成する。

ところが、U'^tU^tを具体的に計算すると

$$\begin{aligned}
&U'^tU^t\\
&=\psi\psi'(1-\phi_1'\sigma_2-\phi_2'\gamma_1-\phi_3'\gamma_3)(1-\phi_1\sigma_2-\phi_2\gamma_1-\phi_3\gamma_3)\\
&=\psi\psi'\{(1+\phi_1'\phi_1+\phi_2'\phi_2+\phi_3'\phi_3)-(\phi_1'+\phi_1)\sigma_2-(\phi_2'+\phi_2)\gamma_1\\
&\qquad -(\phi_3'+\phi_3)\gamma_3+i(\phi_2'\phi_3-\phi_3'\phi_2)\sigma_2+i(\phi_3'\phi_1-\phi_1'\phi_3)\gamma_1\\
&\qquad +i(\phi_1'\phi_2-\phi_2'\phi_1)\gamma_3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1&=(\phi_2'\phi_3-\phi_3'\phi_2)\sigma_2\\
S_2&=(\phi_3'\phi_1-\phi_1'\phi_3)\gamma_1 \qquad (B-4-3)\\
S_3&=(\phi_1'\phi_2-\phi_2'\phi_1)\gamma_3
\end{aligned}$$

であり四次元形式を保持しない。この理由は、Ｕの方向が一致しない場合は三次元の回転要素がはいってくるからである。それらは S_1，S_2，S_3であらわされる。方向が一致すればＳ＝０となる。

実際にＡがＳで変換される場合を計算すると、

$$\psi^2\psi'^2\times$$
$$i\,(S_1\sigma_2+S_2\gamma_1+S_3\gamma_3)\;(ct+x\sigma_2+y\gamma_1+z\gamma_3)\;(-i)\;(S_1\sigma_2+S_2\gamma_1+S_3\gamma_3)$$
$$=\psi^2\psi'^2\{(\underbrace{S_1x+S_2y+S_3z}_{A})+(\underbrace{S_1ct+iS_2z-iS_3y}_{B})\sigma_2$$
$$+(\underbrace{S_2ct+iS_3x-iS_1z}_{C})\gamma_1+(\underbrace{S_3ct+iS_1y-iS_2x}_{D})\gamma_3\}\;(S_1\sigma_2+S_2\gamma_1+S_3\gamma_3)$$

$$=\psi^2\psi'^2\{(BS_1+CS_2+DS_3)+(AS_1+iCS_3-iDS_2)\sigma_2$$
$$+(AS_2+iDS_1-iBS_3)\gamma_1+(AS_3+iBS_2-iCS_1)\gamma_3\}$$

である。簡単な計算から

$$BS_1+CS_2+DS_3=(S_1^2+S_2^2+S_3^2)\,ct$$

$$AS_1+iCS_3-iDS_2=(S_1^2-S_2^2-S_3^2)\,x+2S_1S_2y+2S_3S_1z$$

$$AS_2+iDS_1-iBS_3=2S_1S_2x+(-S_1^2+S_2^2-S_3^2)\,y+2S_2S_3z$$

$$AS_3+iBS_2-iCS_1=2S_3S_1x+2S_2S_3y+(-S_1^2-S_2^2+S_3^2)\,z$$

ここで

$$\frac{S_1^2-S_2^2-S_3^2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}=l_1\qquad\frac{2S_1S_2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}=m_1\qquad\frac{2S_3S_1}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}=n_1$$

$$\frac{2S_1S_2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}=l_2\qquad\frac{-S_1^2+S_2^2-S_3^2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}=m_2\qquad\frac{2S_2S_3}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}=n_2$$

$$\frac{2S_3S_1}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}=l_3\qquad\frac{2S_2S_3}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}=m_3\qquad\frac{-S_1^2-S_2^2+S_3^2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2}=n_3$$

したがって

$$\psi^2\psi'^2(S_1^2+S_2^2+S_3^2)\;\{ct+(l_1x+m_1y+n_1z)\sigma_2+(l_2x+m_2+n_2z)\gamma_1$$
$$+(l_3x+m_3y+n_3z)\gamma_3\}\tag{B-4-4}$$

であり、

$$\begin{aligned}
&l_1^2+m_1^2+n_1^2=l_2^2+m_2^2+n_2^2=l_3^2+m_3^2+n_3^2=1\\
&l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0\\
&l_1^2+l_2^2+l_3^2=m_1^2+m_2^2+m_3^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1\\
&l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3=0
\end{aligned}\tag{B-4-5}$$

をみたすことは、あきらかであるから l,m,nはそれぞれの方向余弦と考えることができる。
したがって、この変換はct項を動かさず、x,y,z軸の直交軸をそれぞれ新しい直交軸に移すので、三次元空間の回転をあらわしている。

以上の議論より、任意の Lorentz変換を２回おこなうと、三次元空間の回転が内在的に加わってくることが示された。

また、U^tとU'^tの順序を逆にすると、回転の方向が入れかわるために同一の変換とはならないことが簡単に理解される。

＊一般のＬｏｒｅｎｔｚ変換の行列表現

Ｌｏｒｅｎｔｚ変換の反復は、（Ｂ－４－１）から

$$A' = U_i{}^t (U_{i-1}{}^t \cdots (U_1{}^t A U_1{}^t) \cdots U_{i-1}{}^t) U_i{}^t$$

で表されるが、Ｕのエルミット性を考慮すると、結合法則を用いて、

$$(U_i{}^t U_{i-1}{}^t \cdots U_1{}^t)^* = U_1{}^{t*} \cdots U_{i-1}{}^{t*} U_i{}^{t*} = U_1{}^t \cdots U_{i-1}{}^t U_i{}^t$$

であるから

$$V = U_i{}^t U_{i-1}{}^t \cdots U_1{}^t$$

とおくと,
一般的なＬｏｒｅｎｔｚ変換の行列表現として

$$A' = V A V^*$$

を得る。

Ｂ－５．相対論的力学の諸法則

以上の結果は、よく知られた相対論の基本公式であるが、もっとも重要なことは、変換の前後において、四次元形式が保たれることである。

このなかで、根本的な式は、当然のこととして

$$V=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(1+\beta_1\sigma_2+\beta_2\gamma_1+\beta_3\gamma_3)=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix}1 & i\beta_1 & i\beta_3 & i\beta_2\\ -i\beta_1 & 1 & i\beta_2 & -i\beta_3\\ -i\beta_3 & -i\beta_2 & 1 & i\beta_1\\ -i\beta_2 & i\beta_3 & -i\beta_1 & 1\end{pmatrix}$$

$$(B-5-1)$$

である。

静止質量をm_0として、（Ｂ－５－１）の両辺にm_0cをかけると

$$m_0cV=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(c+v_1\sigma_2+v_2\gamma_1+v_3\gamma_3) \qquad (B-5-2)$$

である。

$$\sqrt{|m_0cV|}=m_0^2c^2$$

であり、不変量となる。

$$\frac{E}{c}=\frac{m_0c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad p_i=\frac{m_0v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (B-5-3)$$

で定義すると

Eは相対論的エネルギー、p_iは相対論的運動量となる。

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=mc^2\sim m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$$ はよく知られた公式である。

また

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2=m_0^2c^2$$

$$(B-5-4)$$

$$\frac{E}{c}=\sqrt{m_0^2c^2+p^2}$$

は、もっともよく使用される。

くわしくは、相対論的量子力学において論ずるが、B-5-3は Hamilton形式に簡単に書き直せる。

古典力学では

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial q} \qquad \frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p} \qquad H=\sum p\dot{q}-L \qquad (B-5-5)$$

などがなりたつ。　いま、運動エネルギーのみを考え

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\beta^2}$$

とおくと　$Lagrange$の公式から

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=\frac{dp}{dt}-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \qquad \frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{\partial L}{\partial q}$$

であるから

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q} \qquad (B-5-6)$$

がなりたつ。

一方、（B-5-3）より

$$H=c\sqrt{m_0c^2+p^2}$$

であるから

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{cp}{\sqrt{m_0c^2+p^2}}=\frac{p}{m_0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m_0c^2}}}=\frac{p}{m_0}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}}}$$

$$=\frac{p}{m_0}\sqrt{1-\beta^2}=\dot{q}$$

よって

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p} \qquad (B-5-7)$$

これは、Hamiltonの正準方程式に他ならない。