## C－1．電磁方程式のスピノールによる統一

電磁方程式の基本式を示す。

$$\left.\begin{aligned} rot\,\mathbb{E} &= -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} \\ rot\,\mathbb{H} &= \mathbb{i} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} \\ div\,\mathbb{D} &= \rho \\ div\,\mathbb{B} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$Maxwell$の電磁方程式
ただし、ここでは分極、磁化は考慮せず

$\mathbb{D}=\varepsilon\,\mathbb{E}$， $\mathbb{H}=\dfrac{1}{\mu}\mathbb{B}$， $c^2=\dfrac{1}{\varepsilon\mu}$

とする。 $(C-1-1)$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{B} &= rot\,\mathbb{A} \\ \mathbb{E} &= -grad\phi - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

電磁ポテンシャル $(C-1-2)$

$$\varepsilon\mu\frac{\partial \phi}{\partial t} + div\,\mathbb{A} = 0 \quad \}$$

ローレンツ条件 $(C-1-3)$

さらに Lorentz gaugeとして

$$\left.\begin{aligned} \phi' &= \phi + \frac{\partial u}{\partial t} \\ \mathbb{A}' &= \mathbb{A} - grad\,u \end{aligned}\right\} \qquad (C-1-4)$$

が、与えられている。

これらを統一的に記述する方法を示す。

$$P=\frac{\phi}{c}+A_x\sigma_2+A_y\gamma_1+A_z\gamma_3 \qquad Q=\frac{\rho}{c\varepsilon}+\mu q_x\sigma_2+\mu q_y\gamma_1+\mu q_z\gamma_3$$

あるいは

$$D=\frac{\partial}{c\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\sigma_2-\frac{\partial}{\partial y}\gamma_1-\frac{\partial}{\partial z}\gamma_3 \qquad \frac{Q}{\mu}=c\rho+q_x\sigma_2+q_y\gamma_1+q_z\gamma_3$$

$(C-1-5)$

（電流 $i$ は虚数記号と紛らわしいので、$q$ とした。）

を定義する。

D，PおよびQは、すべて四次元形式を満足するから、Lorentz変換に対して形式が不変である。Dの虚数項が負であることは相対論的量子力学において再度論ずる。

$D^{t}P$を計算すると、(C-1-2,3)を使って

$$D^{t}P=\left(\frac{\partial}{c\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\sigma_2+\frac{\partial}{\partial y}\gamma_1+\frac{\partial}{\partial z}\gamma_3\right)\left(\frac{\phi}{c}+A_x\sigma_2+A_y\gamma_1+A^z\gamma_3\right)$$

$$=\left(\frac{\partial\phi}{c^2\partial t}+div\,\mathbb{A}\right)+\left\{\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)+i\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right\}\sigma_2$$

$$+\left\{\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)+i\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right\}\gamma_1$$

$$+\left\{\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)+i\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right\}\gamma_3$$

$$=\left(-\frac{E_x}{c}+iB_x\right)\sigma_2+\left(-\frac{E_y}{c}+iB_y\right)\gamma_1+\left(-\frac{E_z}{c}+iB_z\right)\gamma_3 \qquad (C-1-6)$$

さらに、$DD^{t}P$を計算すると、(C-1-1)を使って

$$DD^{t}P=\left(\frac{\partial}{c\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\sigma_2-\frac{\partial}{\partial y}\gamma_1-\frac{\partial}{\partial z}\gamma_3\right)(D^{t}P)$$

$$=\left(\frac{1}{c}div\,\mathbb{E}-i\,div\,\mathbb{B}\right)+\left\{\left(-\frac{\partial E_x}{c^2\partial t}+\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+i\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\right\}\sigma_2$$

$$+\left\{\left(-\frac{\partial E_y}{c^2\partial t}+\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+i\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}+\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\right\}\gamma_1$$

$$+\left\{\underbrace{\left(-\frac{\partial E_z}{c^2\partial t}+\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)}_{-\frac{\partial\mathbb{E}}{c^2\partial t}+rot\,\mathbb{B}}+i\underbrace{\frac{1}{c}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)}_{\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t}+rot\,\mathbb{E}\right)}\right\}\gamma_3$$

これが、Qに等しいと仮定すると(C-1-7)の満たすべき条件は
Maxwellの電磁方程式に一致する。また、

$$DD^{t}=\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$=-\Box \qquad (C-1-8)$$

であり

$$DD^{t}P=-\Box P=Q \qquad (C-1-9)$$

これは

$$\Box\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \Box\mathbb{A}=-\mu\,\mathbb{j} \qquad (C-1-10)$$

と同等である。

以上から　$DD^tP=Q$　という一式に（C-1-1,2,3)のすべてが含有されていることが理解される。

Qにさらに$D^t$を作用させると

$$D^tQ=\left(\frac{\partial}{c\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\sigma_2+\frac{\partial}{\partial y}\gamma_1+\frac{\partial}{\partial z}\gamma_3\right)\left(\frac{\rho}{c\varepsilon}+\mu q_x\sigma_2+\mu q_y\gamma_1+\mu q_z\gamma_3\right)$$

$$=\left(\frac{\partial\rho}{c^2\varepsilon\partial t}+\mu\, div\,\mathbb{q}\right)+\left\{\left(\frac{1}{c\varepsilon}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial q_x}{\partial t}\right)+i\left(\mu\frac{\partial q_z}{\partial y}-\mu\frac{\partial q_y}{\partial z}\right)\right\}\sigma_2$$

$$+\left\{\left(\frac{1}{c\varepsilon}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial q_y}{\partial t}\right)+i\left(\mu\frac{\partial q_x}{\partial z}-\mu\frac{\partial q_z}{\partial x}\right)\right\}\gamma_1$$

$$+\left\{\underbrace{\left(\frac{1}{c\varepsilon}\frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial q_z}{\partial t}\right)}_{\frac{1}{c\varepsilon}grad\rho+\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbb{q}}{\partial t}}+i\underbrace{\left(\mu\frac{\partial q_y}{\partial x}-\mu\frac{\partial q_x}{\partial y}\right)}_{\mu\, rot\,\mathbb{q}}\right\}\gamma_3 \qquad (C-1-11)$$

である。

ところで、$D^tQ=(D^tD)(D^tP)=-\Box(D^tP)$であるから(C-1-6)と(C-1-11)より

$$\Box\mathbb{E}=-\left(-\frac{1}{\varepsilon}grad\rho-\mu\frac{\partial\mathbb{q}}{\partial t}\right) \qquad (C-1-12)$$

$$\Box\mathbb{B}=-\mu\, rot\,\mathbb{q} \qquad (C-1-13)$$

の関係をえる。

また、ローレンツ条件部分は、

$$\Box\left(\frac{\partial\phi}{c^2\partial t}+div\,\mathbb{A}\right)=0$$　から

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,\mathbb{q}=0 \qquad (C-1-14)$$

(C-1-14)は電荷の保存則に他ならない。

このように、Lorentz条件が満たされていれば、電荷の保存則は保証されることになる。

(C-1-10)の解は、よく知られているように

$$\phi(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\rho(\mathbf{r}', t\pm|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\mathbf{q}(\mathbf{r}', t\pm|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' \qquad (C-1-15)$$

であるから、(C−1−12,13)の解は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint grad\left(\frac{\rho}{r}\right)dv'-\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{q}}{r}\right)dv'$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint rot\left(\frac{\mathbf{q}}{r}\right)dv' \qquad (C-1-16)$$

である。

(C-1-15,16)を忠実に計算してゆくと、$\rho$および$\mathbf{q}$も、$\mathbf{r}$の関数であることを考慮して、遅延ポテンシャルから導かれる電場，磁場が求められる。

＊ Aharonov-Bohm 効果

$D^t P$が、４次元形式を保持するためには、磁場$B_i$が０になることが、必要条件である。

このとき、(C-1-6)は、

$$D^t P=\left(\frac{\partial\phi}{c^2\partial t}+div\,\mathbf{A}\right)-\frac{E_x}{c}\sigma_2-\frac{E_y}{c}\gamma_1-\frac{E_z}{c}\gamma_3 \qquad (C-1-17)$$

であり、電磁場は、完全な４次元形式となる。Ｌｏｒｅｎｔｚ条件の有無は問わない。

この著しい特徴は、Aharonov-Bohm 効果として知られているが、実際には、量子的な環境でないと、存在は困難である。

## C－2．Lorentz gaugeの記法　および Hertzの超ポテンシャル

C－1の記法を用いれば、Lorentz gaugeは次のようにあらわすことができる。

uを任意のスカラー関数とすれば

$$Du=\left(\frac{\partial}{c\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\sigma_2-\frac{\partial}{\partial y}\gamma_1-\frac{\partial}{\partial z}\gamma_3\right)u$$

$$=\frac{\partial u}{c\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}\sigma_2-\frac{\partial u}{\partial y}\gamma_1-\frac{\partial u}{\partial z}\gamma_3 \qquad (C-2-1)$$

$$D^t Du=(D^t D)u=-\Box u$$

であるから

uが　□u＝０を満足すれば

(C-1-5)の電磁ポテンシャルに(C-2-1)を加えても$\mathbb{E}$、$\mathbb{B}$およびローレンツ条件は変化しない。

すなわち

$$P'=\frac{\phi'}{c}+A_x'+A_y'+A_z'$$

$$=P+Du$$

$$=\left(\frac{\phi}{c}+\frac{\partial u}{c\partial t}\right)+\left(A_x-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_2+\left(A_y-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\gamma_1+\left(A_z-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\gamma_3$$

とすると

$$D^t P'=D^t(P+Du)=D^t P \qquad (C-2-2)$$

である。

この

$$\left.\begin{aligned}\phi'&=\phi+\frac{\partial u}{\partial t}\\ \mathbb{A}'&=\mathbb{A}-grad\,u\end{aligned}\right\} \qquad (C-2-3)$$

を Lorentz gaugeとよぶ。

□u≠０　であっても (C-2-3)を満足する任意関数uは、測定される$\mathbb{E}$，$\mathbb{B}$を変化させることはない。このような変換を gauge変換とよんでいる。

ｕはスカラーであるから、これと対をなすベクトルがあってもよさそうである。

これを

$$G=\frac{\pi_x}{c}\sigma_2+\frac{\pi_y}{c}\gamma_1+\frac{\pi_z}{c}\gamma_3 \qquad (C-2-4)$$

とおく。

これに、*Lorentz gauge*とおなじく $D$演算を施すと

$$DG=\left(\frac{\partial}{c\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\sigma_2-\frac{\partial}{\partial y}\gamma_1-\frac{\partial}{\partial z}\gamma_3\right)\left(\frac{\pi_x}{c}\sigma_2+\frac{\pi_y}{c}\gamma_1+\frac{\pi_z}{c}\gamma_3\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\pi_x}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial\pi_y}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial\pi_z}{\partial z}\right)+\left\{\frac{\partial\pi_x}{c^2\partial t}-i\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\pi_z}{\partial y}-\frac{\partial\pi_y}{\partial z}\right)\right\}\sigma_2$$

$$\left\{\frac{\partial\pi_y}{c^2\partial t}-i\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\pi_x}{\partial z}-\frac{\partial\pi_z}{\partial x}\right)\right\}\gamma_1+\left\{\frac{\partial\pi_z}{c^2\partial t}-i\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\pi_y}{\partial x}-\frac{\partial\pi_x}{\partial y}\right)\right\}\gamma_3$$

すなわち、

$$DG=-\frac{1}{c}\mathrm{div}\,\boldsymbol{\pi}+\left(\frac{\partial\boldsymbol{\pi}_x}{c^2\partial t}-i\frac{1}{c}\mathrm{rot}_x\boldsymbol{\pi}\right)\sigma_2+\left(\frac{\partial\boldsymbol{\pi}_y}{c^2\partial t}-i\frac{1}{c}\mathrm{rot}_y\boldsymbol{\pi}\right)\gamma_1$$

$$+\left(\frac{\partial\boldsymbol{\pi}_z}{c^2\partial t}-i\frac{1}{c}\mathrm{rot}_z\boldsymbol{\pi}\right)\gamma_3$$

$$(C-2-5)$$

これが、$P$と同一の形式をとるためには

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\pi}=0 \qquad (C-2-6)$$

でなければならない。

さらに、$G$が $\mathbb{E}$、$\mathbb{B}$ に影響しないためには、

$$D^{t}DG=-\Box G=-\Box\boldsymbol{\pi}=0 \qquad (C-2-7)$$

を満たさなければならない。

以上の議論より、

$$\Box\boldsymbol{\pi}=0,\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\pi}=0 \qquad (C\text{-}2\text{-}8)$$

をＧが同時にみたせば、Lorentz gaugeと同等のベクトルを考えることができそうである。

われわれは、Lorentz gaugeを scalar gauge, (C-2-7)を vector gaugeと名ずけることを提案する。

当然のこととして

$scalar$ および $vector\ gauge$の和

$$G' = u + \pi_x \sigma_2 + \pi_y \gamma_1 + \pi_z \gamma_3 \qquad (C-2-9)$$

は、四次元形式を満足する。

最後に Hertzの超ポテンシャルについて議論しておかなければならない。

いま、$P$, $D^t P$, $DD^t P(=Q)$の類推から

$DL = P$ となる $L$を考える。

$L$は、(C−1−6) の形式をとるものとする。

すなわち、

$$L = \left(\frac{M_x}{c} + iN_x\right)\sigma_2 + \left(\frac{M_y}{c} + iN_y\right)\gamma_1 + \left(\frac{M_z}{c} + iN_z\right)\gamma_3 \qquad (C-2-10)$$

とおく。

$$DL = \left(\frac{\partial}{c\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\sigma_2 - \frac{\partial}{\partial y}\gamma_1 - \frac{\partial}{\partial z}\gamma_3\right)L$$

$$= \left(-\frac{1}{c}\,div\,\mathbb{M} - i\,div\,\mathbb{N}\right) + \left\{\left(\frac{\partial M_x}{c^2\partial t} + rot_x\mathbb{N}\right) - i\left(-\frac{\partial N_x}{c\partial t} + \frac{1}{c}rot_x\mathbb{M}\right)\right\}\sigma_2$$

$$+ \left\{\left(\frac{\partial M_y}{c^2\partial t} + rot_y\mathbb{N}\right) - i\left(-\frac{\partial N_y}{c\partial t} + \frac{1}{c}rot_y\mathbb{M}\right)\right\}\gamma_1$$

$$+ \left\{\left(\frac{\partial M_z}{c^2\partial t} + rot_z\mathbb{N}\right) - i\left(-\frac{\partial N_z}{c\partial t} + \frac{1}{c}rot_z\mathbb{M}\right)\right\}\gamma_3$$

これが、$P$と同一の形式を有するためには、

$$\phi = -div\,\mathbb{M}, \qquad div\,\mathbb{N} = 0$$

$$\mathbb{A} = \frac{\partial\mathbb{M}}{c^2\partial t} + rot\,\mathbb{N}, \qquad \frac{\partial\mathbb{N}}{c\partial t} - \frac{1}{c}rot\,\mathbb{M} = 0 \qquad (C-2-11)$$

(C-2-11)は、Maxwellの電磁方程式とまったく同じである。

しかし、$Hertz$の超ポテンシャルを導くためには

$rot\,\boldsymbol{N}=0$

の条件を付加する必要がある。

このとき、

$$\phi=-div\,\boldsymbol{M},\qquad \boldsymbol{A}=\frac{\partial\boldsymbol{M}}{c^2\partial t}\qquad (C-2-12)$$

であり、$\boldsymbol{M}$は $Hertz$の超ポテンシャルに他ならない。

したがって、$\boldsymbol{N}$には、

$div\,\boldsymbol{N}=0,\qquad rot\,\boldsymbol{N}=0$

という、おおきな制約がつくことになる。このような$\boldsymbol{N}$の解は存在するであろうか。

また、ベクトル公式から

$grad\cdot div\,\boldsymbol{N}=rot\cdot rot\,\boldsymbol{N}+\triangle\boldsymbol{N}$

であるから

$\triangle\boldsymbol{N}=0$

が恒等的になりたつことになる。

よって、

$$\boldsymbol{E}=\Box\boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{B}=-\Box\boldsymbol{N}=\frac{\partial^2\boldsymbol{N}}{c^2\partial t^2}=\frac{\partial\,rot\,\boldsymbol{M}}{c^2\partial t}=\frac{1}{c^2}rot\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t}\qquad (C-2-13)$$

となる。

さらに,これらに $Lorentz$変換をくわえると

$D'=U^tDU^t$

$L'=ULU^t$　（これは次節において詳しく論ずる）

に従うはずであるから、

$$P'=D'L'=(U^tDU^t)(ULU^t)$$

$$=U^t(DL)U^t=U^tPU^t$$

であることが示される。

このように考えると、いくらでも高次のポテンシャルが、四次元形式を保持しながら、作り出していくことができる。

## C－3. 電磁場の Lorentz変換

DおよびPは、四次元形式をみたすので、Lorentz変換式はそれぞれ

$$D' = U^t D U^t \qquad D^{t\prime} = U D^t U$$
$$P' = U^t P U^t \qquad (C\text{-}3\text{-}1)$$

となるはずである。
これから、Qが同様の変換に従うことは

$$\begin{aligned} Q' &= D' D^{t\prime} P' \\ &= (U^t D U^t)(U D^t U)(U^t P U^t) \\ &= U^t D D^t P U^t \\ &= U^t Q U^t \end{aligned} \qquad (C\text{-}3\text{-}2)$$

より理解される。
したがって、(C-1-6)の Lorentz変換は

$$D^{t\prime} P' = U D^t (U U^t) P U^t = U (D^t P) U^t \qquad (C\text{-}3\text{-}3)$$

であらわされる。これを x-軸方向についてもとめると

$U = \dfrac{1}{\sqrt{1-\phi^2}}(1+\phi\sigma_2)$ とおいて

$$D^{t\prime} P' = U(D^t P)U^t$$

$$= \frac{1}{1-\phi^2}(1+\phi\sigma_2)\left\{\left(-\frac{E_x}{c}+iB_x\right)\sigma_2+\left(-\frac{E_y}{c}+iB_y\right)\gamma_1+\left(-\frac{E_z}{c}+iB_z\right)\gamma_3\right\}(1-\phi\sigma_2)$$

$$= \frac{1}{1-\phi^2}\left[\phi\left(-\frac{E_x}{c}+iB_x\right)+\left(-\frac{E_x}{c}+iB_x\right)\sigma_2+\left\{\left(-\frac{E_y}{c}+iB_y\right)-i\phi\left(-\frac{E_z}{c}+iB_z\right)\right\}\gamma_1\right.$$
$$\left.+\left\{\left(-\frac{E_z}{c}+iB_z\right)+i\phi\left(-\frac{E_y}{c}+iB_y\right)\right\}\gamma_3\right](1-\phi\sigma_2)$$

$$= \frac{1}{1-\phi^2}\left[(1-\phi^2)\left(-\frac{E_x}{c}+iB_x\right)\sigma_2+\left\{(1+\phi^2)\left(-\frac{E_y}{c}+iB_y\right)-2i\phi\left(-\frac{E_z}{c}+iB_z\right)\right\}\gamma_1\right.$$
$$\left.+\left\{(1+\phi^2)\left(-\frac{E_z}{c}+iB_z\right)+2i\phi\left(-\frac{E_y}{c}+iB_y\right)\right\}\gamma_3\right]$$

であり、$D^t P$の形式は保持される。

(B-1-2)の関係式をもちいると、上式は

$$-\frac{E_x'}{c}+iB_x'=-\frac{E_x}{c}+iB_x$$

$$-\frac{E_y'}{c}+iB_y'=\frac{-\frac{E_y}{c}+\beta B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}+i\frac{B_y+\beta\frac{E_z}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (C-3-4)$$

$$-\frac{E_z'}{c}+iB_z'=\frac{-\frac{E_z}{c}-\beta B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}+i\frac{B_z-\beta\frac{E_y}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

これより

$$E_x'=E_x \qquad E_y'=\frac{E_y-vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad E_z'=\frac{E_z+vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$B_x'=B_x \qquad B_y'=\frac{B_y+\frac{vE_z}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad B_z'=\frac{B_z-\frac{vE_y}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$(C-3-5)$$

あるいは $c^2=\frac{1}{\varepsilon\mu}$ の関係をもちいて

$$H_x'=H_x \qquad H_y'=\frac{H_y+vD_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad H_z'=\frac{H_z-vD_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

これが電磁場の x-軸方向への Lorentz変換式である。

任意方向で運動する場合は、

$$K' = \left(-\frac{E_x'}{c}+iB_x'\right)\sigma_2+\left(-\frac{E_y'}{c}+iB_y'\right)\gamma_1+\left(-\frac{E_z'}{c}+iB_z'\right)\gamma_3$$

$$K = \left(-\frac{E_x}{c}+iB_x\right)\sigma_2+\left(-\frac{E_y}{c}+iB_y\right)\gamma_1+\left(-\frac{E_z}{c}+iB_z\right)\gamma_3$$

$$U=\frac{1}{\sqrt{1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2}}(1+\phi_1\sigma_2+\phi_2\gamma_1+\phi_3\gamma_3)$$

$$V=\frac{1}{\sqrt{1-\phi_1{}^2-\phi_2{}^2-\phi_3{}^2}}$$

とおくと、

$K' = UKU^t$ (C-3-6)

となることは、容易に推測される。

いま、

$K' = N_x' \sigma_2 + N_y' \gamma_1 + N_z' \gamma_3$

$K = N_x \sigma_2 + N_y \gamma_1 + N_z \gamma_3$

とおくと

$K' = UKU^t$

$E$項： 0

$\sigma_2$項：

$$N_x' = V^2 \{(1-\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2)N_x - 2\phi_1\phi_2 N_y - 2\phi_3\phi_1 N_z + 2i(\phi_2 N_z - \phi_3 N_y)\}$$

$\gamma_1$項：

$$N_y' = V^2 \{(1+\phi_1^2-\phi_2^2+\phi_3^2)N_y - 2\phi_1\phi_2 N_x - 2\phi_2\phi_3 N_z + 2i(\phi_3 N_x - \phi_1 N_z)\}$$

$\gamma_3$項：

$$N_z' = V^2 \{(1+\phi_1^2+\phi_2^2-\phi_3^2)N_z - 2\phi_3\phi_1 N_x - 2\phi_2\phi_3 N_y + 2i(\phi_1 N_y - \phi_2 N_x)\}$$

(B-3-2),(B-3-8)などをもちいて

$$N_x' = \frac{N_x}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)(\beta_1^2 N_x + \beta_1\beta_2 N_y + \beta_3\beta_1 N_z) + i\,\frac{(\boldsymbol{\beta}\times\mathbb{N})_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$N_y' = \frac{N_y}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)(\beta_1\beta_2 N_x + \beta_2^2 N_y + \beta_2\beta_3 N_z) + i\,\frac{(\boldsymbol{\beta}\times\mathbb{N})_y}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$N_y' = \frac{N_z}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)(\beta_3\beta_1 N_x + \beta_2\beta_3 N_y + \beta_3^2 N_z) + i\,\frac{(\boldsymbol{\beta}\times\mathbb{N})_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(以上 $C$−3−7)

これを、さらに完結に書くと

$$\mathbb{N}' = \frac{\mathbb{N}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \left\{\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbb{N})\right\}\boldsymbol{\beta} + i\,\frac{\boldsymbol{\beta}\times\mathbb{N}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (C-3-8)$$

である。

これが、電磁場の Lorentz変換の一般式である。

さらに、$\mathbb{\beta}$と$\mathbb{N}$が互いに平行と垂直の場合に分けて記すと
$\mathbb{\beta} \parallel \mathbb{N}$ のときは $(\mathbb{\beta}\cdot\mathbb{N})\mathbb{\beta}=\beta^2\mathbb{N}$, $\mathbb{\beta}\times\mathbb{N}=0$ であることを考慮して

$$\mathbb{N}' = \mathbb{N} \qquad (C-3-9)$$

$\mathbb{\beta} \perp \mathbb{N}$ のときは $(\mathbb{\beta}\cdot\mathbb{N})=0$ であるから

$$\mathbb{N}' = \frac{\mathbb{N} + i(\mathbb{\beta}\times\mathbb{N})}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (C-3-10)$$

である。
すなわち、

$$\mathbb{E}_{\parallel}' = \mathbb{E}_{\parallel}$$

$$\mathbb{E}_{\perp}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\mathbb{E} + \mathbb{v}\times\mathbb{B})_{\perp}$$

$$\mathbb{H}_{\parallel}' = \mathbb{H}_{\parallel}$$

$$\mathbb{H}_{\perp}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\mathbb{H} - \mathbb{v}\times\mathbb{D})_{\perp}$$

(以上$C-3-11$)

とも書くことができる。

$\mathbb{V}$が十分小さい場合は、$\beta\to 0$として

$$\mathbb{E}' = \mathbb{E} + \mathbb{v}\times\mathbb{B}$$

$$(C-3-12)$$

$$\mathbb{H}' = \mathbb{H} - \mathbb{v}\times\mathbb{D}$$

をえるが、これは、電磁気学でよく知られた関係である。

## Ｃ－４．電磁波のエネルギーおよび運動量

$$K=\left(-\frac{E_x}{c}+iB_x\right)\sigma_2+\left(-\frac{E_y}{c}+iB_y\right)\gamma_1+\left(-\frac{E_z}{c}+iB_z\right)\gamma_3$$

とし,

$$-\frac{1}{2\mu}\overline{K}\ K \qquad (C-4-1)$$

という量を定義する.

これを計算すると、$\sigma_2$の複素共役が$-\sigma_2$となることなどに注意して、

$$-\frac{1}{2\mu}\overline{K}K=\left\{\frac{1}{2}\left(\varepsilon\mathbb{E}^2+\frac{1}{\mu}\mathbb{B}^2\right)+\frac{1}{c\mu}(\mathbb{E}\times\mathbb{B})_x\sigma_2+\frac{1}{c\mu}(\mathbb{E}\times\mathbb{B})_y\gamma_1+\frac{1}{c\mu}(\mathbb{E}\times\mathbb{B})_z\gamma_3\right\}$$

$$=\left(u+\frac{S_x}{c}\sigma_2+\frac{S_y}{c}\gamma_1+\frac{S_z}{c}\gamma_3\right) \qquad (C-4-2)$$

ここで、

$u=\frac{1}{2}\left(\varepsilon\mathbb{E}^2+\frac{1}{\mu}\mathbb{B}^2\right)$ は電磁波のエネルギー

$(C-4-3)$

$\mathbb{S}=\frac{1}{\mu}\mathbb{E}\times\mathbb{B}$ はポインティングベクトル（*Poynting vector*）

を示している。
(C-4-2)は、四次元形式を保持している。

これに、さらにD$^t$を作用させると、

$$-\frac{1}{2\mu}D^t\overline{K}K$$

$$=\left(\frac{\partial}{c\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\sigma_2+\frac{\partial}{\partial y}\gamma_1+\frac{\partial}{\partial z}\gamma_3\right)\left(u+\frac{S_x}{c}\sigma_2+\frac{S_y}{c}\gamma_1+\frac{S_z}{c}\gamma_3\right)$$

となるが、これは、電磁ポテンシャルから電場、磁場を求めるのと同一の形式を有している。

$E$項：

$$E項=\frac{\partial u}{c\partial t}+\frac{1}{c}\mathrm{div}\,\mathbb{S}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{div}\,\mathbb{S}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon\,\mathbb{E}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\mathbb{B}\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}$$

$\mathrm{div}\,\mathbb{A}\times\mathbb{B}=\mathbb{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{A}-\mathbb{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{B}$　の公式を用いて

$$\mathrm{div}\,\mathbb{S}=\frac{1}{\mu}\mathbb{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{E}-\frac{1}{\mu}\mathbb{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{B}$$

ところが、$Maxwell$の公式から

$$\frac{1}{\mu}\mathbb{B}\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\mathbb{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{E}=0$$

結局、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{div}\,\mathbb{S}=\varepsilon\,\mathbb{E}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}-\frac{1}{\mu}\mathbb{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbb{B}$$

$$=\mathbb{E}\left(\frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}-\mathrm{rot}\,\mathbb{H}\right)=-\mathbb{E}\,\mathbb{q}$$

すなわち

$$\mathrm{div}\,\mathbb{S}=-\frac{\partial u}{\partial t}-\mathbb{E}\,\mathbb{q} \qquad (C-4-4)$$

のよく知られた関係を得る。（$C-4-4$）を$Gauss$の定理で積分形に直すと

$$\iint(\mathbb{E}\times\mathbb{H})\,dS=-\frac{\partial}{\partial t}\iiint u\,dV-\iiint\mathbb{E}\,\mathbb{q}\,dV \qquad (C-4-5)$$

であり、$\mathbb{S}$ｄＳは面Ｓを通って毎秒出てゆくエネルギー、$\mathbb{E}\,\mathbb{q}$の項は、電流によるジュール熱を表している。

$\sigma_2$項：

$\sigma_2$項は、 $$\left(\frac{\partial S_x}{c^2\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+i\,\frac{1}{c}\left(\frac{\partial S_z}{\partial y}-\frac{\partial S_y}{\partial z}\right) \qquad (C-4-6)$$

であるが、その実数部分を計算すると、

$$\frac{\partial S_x}{c^2\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\mu c^2}\frac{\partial}{\partial t}(E_yB_z-E_zB_y)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\varepsilon\,\mathbb{E}^2+\frac{1}{2\mu}\mathbb{B}^2\right)$$

$$=\varepsilon\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}B_z+E_y\frac{\partial B_z}{\partial t}-\frac{\partial E_z}{\partial t}B_y-E_z\frac{\partial B_y}{\partial t}\right)+\varepsilon E_x\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{1}{\mu}B_x\frac{\partial B_x}{\partial x}$$

$$+\varepsilon E_y\frac{\partial E_y}{\partial x}+\frac{1}{\mu}B_y\frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$+\varepsilon E_z\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{1}{\mu}B_z\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$=(1)$$

すなわち、

$$(1)=\left(\frac{\partial D_y}{\partial t}B_z+B_z\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\cdots\cdots=B_z\left(\frac{\partial D_y}{\partial t}-\mathrm{rot}_y\mathbb{H}+\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)=B_z\left(-q_y+\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)$$

$$+\left(-\frac{\partial D_z}{\partial t}B_y+B_y\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)\cdots\cdots=B_y\left(-\frac{\partial D_z}{\partial t}+\mathrm{rot}_z\mathbb{H}+\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)=B_y\left(q_z+\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$+B_x\frac{\partial H_x}{\partial x}$$

$$+\left(-D_z\frac{\partial B_y}{\partial t}+D_z\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\cdots\cdots=D_z\left(-\frac{\partial B_y}{\partial t}-\mathrm{rot}_y\mathbb{E}+\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)=D_z\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$+\left(D_y\frac{\partial B_z}{\partial t}+D_y\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)\cdots\cdots=D_y\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}+\mathrm{rot}_z\mathbb{E}+\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=D_y\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$+D_x\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

となるが、$\mathrm{div}\,\mathbb{D}=\rho$，$\mathrm{div}\,\mathbb{B}=0$（$\mathrm{div}\,\mathbb{H}=0$）に注意すると、

$$(1)=\underbrace{-(q_yB_z-q_zB_y)}_{-(\mathbb{q}\times\mathbb{B})_x}+\left\{\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial B_x{}^2}{\partial x}+\frac{\partial B_xB_y}{\partial y}+\frac{\partial B_xB_z}{\partial z}\right)-\underbrace{\frac{1}{\mu}B_x\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)}_{B_x div\,\mathbb{B}=0}\right\}$$

$$+\varepsilon\left(\frac{\partial E_x{}^2}{\partial x}+\frac{\partial E_xE_y}{\partial y}+\frac{\partial E_xE_z}{\partial z}\right)-\underbrace{\varepsilon E_x\left(\frac{E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{E_x div\,\mathbb{D}=\rho E_x}$$

結局、

$$\frac{\partial S_x}{c^2\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=-\rho E_x-(\mathbb{q}\times\mathbb{B})_x$$
$$+\underbrace{\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon E_x{}^2+\frac{1}{\mu}B_x{}^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon E_xE_y+\frac{1}{\mu}B_xB_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon E_xE_z+\frac{1}{\mu}B_xB_z\right)\right\}}_{(2)}$$

$$\frac{\partial S_x}{c^2\partial t}+\rho E_x+(\mathbb{q}\times\mathbb{B})_x=-\frac{\partial u}{\partial x}+(2)$$

この右辺は、

$$-\frac{\partial u}{\partial x}+(2)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\varepsilon}{2}(E_x{}^2-E_y{}^2-E_z{}^2)+\frac{1}{2\mu}(B_x{}^2-B_y{}^2-B_z{}^2)\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon E_xE_y+\frac{1}{\mu}B_xB_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon E_xE_z+\frac{1}{\mu}B_xB_z\right)$$

であるが、これは、Maxwellの応力テンソルに他ならない。
すなわち、

$$T_{ij}=\varepsilon E_iE_j+\frac{1}{\mu}B_iB_j-\frac{\varepsilon}{2}\delta_{ij}\mathbb{E}^2-\frac{1}{2\mu}\delta_{ij}\mathbb{B}^2 \qquad (C-4-7)$$

であるから、

$$T_{xx}=\frac{\varepsilon}{2}(E_x^2-E_y^2-E_z^2)+\frac{1}{2\mu}(B_x^2-B_y^2-B_z^2)$$

$$T_{xy}=\varepsilon E_xE_y+\frac{1}{\mu}B_xB_y$$

$$T_{xz}=\varepsilon E_xE_z+\frac{1}{\mu}B_xB_z$$

であり、応力の定義より、

$$F_x=\iiint\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}\right)dV \qquad (C-4-8)$$

よって、

$$F_x=\iiint\left\{\rho E_x+(\mathbb{q}\times\mathbb{B})_x+\frac{\partial S_x}{c^2\partial t}\right\}dV$$

$$=\iiint\left\{\rho E_x+(\mathbb{q}\times\mathbb{B})_x+\frac{\partial}{\partial t}(\mathbb{D}\times\mathbb{B})_x\right\}dV \qquad (C-4-9)$$

となる。　$\gamma_1$および$\gamma_3$項も、まったく同様であるから、ベクトルとして、

$$\mathbb{F}=\iiint\left\{\rho\,\mathbb{E}+\mathbb{q}\times\mathbb{B}+\frac{\partial}{\partial t}(\mathbb{D}\times\mathbb{B})\right\}dV \qquad (C-4-10)$$

が得られる。　これが、電磁気力の公式である。

第１項はクーロン力，第２項はアンペール力をあらわしている。
第３項は、電磁波固有のもので、$\mathbb{D}\times\mathbb{B}$の時間微分が力をしめすから、運動量の次元を持っている。
したがって、

$$\mathbb{G}=\mathbb{D}\times\mathbb{B}=\frac{1}{c^2}\mathbb{S}$$

で単位体積あたりの運動量密度を有することが理解される。

また、(C-4-1)をｃでわれば、

$$-\frac{1}{2c\mu}\bar{K}\,K=\frac{u}{c}+\frac{S_x}{c^2}\sigma_2+\frac{S_y}{c^2}\gamma_1+\frac{S_z}{c^2}\gamma_3$$

であり、これは、力学の

$$\frac{E}{c}+p_x\sigma_2+p_y\gamma_1+p_z\gamma_3$$

に対応するものである。

これは、また

Ｅ＝ｈ$\nu$，｜$\mathbb{p}$｜＝ｈ／$\lambda$　の Einstein-De Broglieの関係とも無関係ではない。

一方、虚数部分である　$rot_x\mathbb{S}$　は如何なる量を表すのであろうか。

$$rot_x\mathbb{S}=\frac{\partial}{\partial y}(E_xH_y-E_yH_x)-\frac{\partial}{\partial z}(E_zH_x-E_xH_z)$$

$$=\frac{\partial E_xH_x}{\partial x}+\frac{\partial E_xH_y}{\partial y}+\frac{\partial E_xH_z}{\partial z}-\left(\frac{\partial E_xH_x}{\partial x}+\frac{\partial E_yH_x}{\partial y}+\frac{\partial E_zH_x}{\partial z}\right)$$

$$=H_x\frac{\partial E_x}{\partial x}+H_y\frac{\partial E_x}{\partial y}+H_z\frac{\partial E_x}{\partial z}+E_x\underbrace{\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}\right)}_{div\,\mathbb{H}=0}$$

$$-\left\{\left(E_x\frac{\partial H_x}{\partial x}+E_y\frac{\partial H_x}{\partial y}+E_z\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)+H_x\underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{div\,\mathbb{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}}\right\}$$

であるから、$\gamma_1$および$\gamma_3$項も考慮して、

$$rot\,\mathbb{S}=(\mathbb{H}\cdot grad)\mathbb{E}-(\mathbb{E}\cdot grad)\mathbb{H}-\frac{\rho}{\varepsilon}\mathbb{H} \qquad (C-4-11)$$

となるが、この意味は、何であろうか。

もし、(C-4-11)がいたるところ０であれば、(C-4-1)は四次元形式となる。