C－5．相対論的不変量の意味

相対論的不変量とは、Lorentz変換を施しても、まったく形が変化しない量のことである。次元や単位を考慮しなければ、数学的に不変量は、無限に多く存在する。ここでは、物理的に意味を有する不変量をしばらく列記する。

＃四次元形式とその複素共役（転置行列）との積は不変量である。

(1)Minkowski時空

$A=ct+x\sigma_2+y\gamma_1+z\gamma_3$

$A'=U^tAU^t$

とおくと、

$$A'^tA'=(U^tAU^t)^t(U^tAU^t)$$
$$=UA^tAU^t \qquad \because UU^t=U^tU=E$$
$$A^tA=\{(ct)^2-x^2-y^2-z^2\}E$$

であるから，結局、

$$A'^tA'=A^tA$$

よって、$Minkowski$測度は、不変量である。

(2)d'Alembertian

$$D=\frac{\partial}{c\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\sigma_2-\frac{\partial}{\partial y}\gamma_1-\frac{\partial}{\partial z}\gamma_3$$

であるから、同様に考え、

$$D'^tD'=(U^tDU^t)^t(U^tDU^t)=D^tD$$

よって、

$$\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}=-\Box$$

は、不変量である。

(3)エネルギー、運動量

$$\frac{E}{c}+p_x\sigma_2+p_y\gamma_1+p_z\gamma_3$$

も四次元形式を保持しているから、

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2-p_x{}^2-p_y{}^2-p_z{}^2$$

は、不変量である。（B−5−4）で示したように、右辺は、$m_0{}^2c^2$となる。

＃二つの四次元形式の内積は不変量である。

(4)平面波の波相

$A=a+b\sigma_2+c\gamma_1+d\gamma_3$

$B=p+q\sigma_2+r\gamma_1+s\gamma_3$

をとると、

$A^tA=a^2-b^2-c^2-d^2$

$B^tB=p^2-q^2-r^2-s^2$ はそれぞれ不変量である。

AとBの和

$(A+B)=(a+p)+(b+q)\sigma_2+(c+r)\gamma_1+(d+s)\gamma_3$

もまた、四次元形式を示すから、$(A+B)^t(A+B)$は不変量となる。

$$(A+B)^t(A+B)=(a+p)^2-(b+q)^2-(c+r)^2-(d+s)^2$$
$$=2(ap-bq-cr-ds)+A^tA+B^tB$$

したがって

$ap-bq-cr-ds$ もまた、不変量である。 この量は、AとBの内積に他ならない。

角振動数と波数ベクトルの間には、

$$W=\frac{\omega}{c}+k_x\sigma_2+k_y\gamma_1+k_z\gamma_3$$

の関係がある。

$A=ct+x\sigma_2+y\gamma_1+z\gamma_3$

との内積

$\omega t-k_xx-k_yy-k_zz$ または

$k_xx+k_yy+k_zz-\omega t$

は、不変量である。

(5)Lienard-Wiechert potential

次節にて議論する。

上記の＃の後者は前者の一般的な表現である、ということができる。

＃電場，磁場形式の２乗は、不変量である。

$$K=\left(-\frac{E_x}{c}+iB_x\right)\sigma_2+\left(-\frac{E_y}{c}+iB_y\right)\gamma_1+\left(-\frac{E_z}{c}+iB_z\right)\gamma_3$$

のＬｏｒｅｎｔｚ変換は、

$K'=UKU^t$

よって、

$(K')^2=(UKU^t)(UKU^t)=U(K^2)U^t$

ところが、

$$K^2=\left(-\frac{E_x}{c}+iB_x\right)^2+\left(-\frac{E_y}{c}+iB_y\right)^2+\left(-\frac{E_z}{c}+iB_z\right)^2$$

であるから

$(K')^2=K^2$　　　　となり、不変量である

したがって

(6)電場，磁場には、

$\mathbb{E}^2/c^2-\mathbb{B}^2$

$\mathbb{E}\cdot\mathbb{B}/c$

の二つの不変量が存在する。

＃４次元形式の体積要素は不変量である。

(7)Jacobian

４次元の体積要素は

$dV=d^4\mathbb{x}=c\,dt\,dx\,dy\,dz$

であらわされる。　これが Lorentz変換に対して不変であることを示そう。
体積要素の座標変換を決定する要素は、

$Jacobian$

$$J=\frac{\partial\ (x_0',x_1',x_2',x_3')}{\partial\ (x_0,x_1,x_2,x_3)}$$

であり、

$$dV' = d^4\mathbf{x}' = J\,d^4\mathbf{x} = J\,dV$$

の関係を得る。
Ｊを計算すると、（Ｂ－３－９）を用いて

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_0'}{\partial x_0} & \frac{\partial x_0'}{\partial x_1} & \frac{\partial x_0'}{\partial x_2} & \frac{\partial x_0'}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_1'}{\partial x_0} & \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} & \cdots & \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \frac{\partial x_3'}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} s & -s\beta_1 & -s\beta_2 & -s\beta_3 \\ -s\beta_1 & 1+u\beta_1{}^2 & u\beta_1\beta_2 & u\beta_1\beta_3 \\ -s\beta_2 & u\beta_1\beta_2 & 1+u\beta_2{}^2 & u\beta_2\beta_3 \\ -s\beta_3 & u\beta_1\beta_3 & u\beta_2\beta_3 & 1+u\beta_3{}^2 \end{vmatrix}$$

ただし　$s=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$u=\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)=\frac{s^2}{s+1}$$

すなわち

$$J= sA_{11}+s\beta_1A_{21}-s\beta_2A_{31}+s\beta_3A_{41}$$

ただし、A_{ij} は 元 a_{ij}の余因数である。

簡単な計算から

$$A_{11} = s\ (1+u\beta^2)$$

$$A_{21} = -u\beta_1$$

$$A_{31} = u\beta_2$$

$$A_{41} = -u\beta_3$$

であるから

$$J= s\ (1+u\beta^2) - u^2\ (\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\beta_3{}^2)$$

$$= s\ (1+u\beta^2) - u^2\beta^2$$

$$=1$$

以上の議論から

ｄＶ’＝　ｄＶ

が結論された。したがって、４次元体積要素は不変である。

＃例外

Ｃ－４．で議論した

$$-\frac{1}{2\mu}\overline{K}\ K=u+\frac{S_x}{c}\sigma_2+\frac{S_y}{c}\gamma_1+\frac{S_z}{c}\gamma_3$$

を考える。

右辺は、四次元形式を満足するので、正規の$Lorentz$変換を施すことができる。

しかし、Kについての変換は、

$K'=UKU^t$　　から　$U^t=\overline{U}$　に注意すると

$$\overline{K'}\ K'=\overline{(UKU^t)}(UKU^t)=U^t(\overline{K}U^2K)U^t$$

であり、$Lorentz$変換に従わないことが示される。

これは、Kが、$Hermite$行列でないことに起因している。

Ｃ－６． Lienard-Wiechertのポテンシャル

動く点電荷によってつくられるポテンシャルを相対論的に求める。
電荷とともに動く系Sでは静電場であるから、Pを四元表示であらわすと

$$P=\left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)=\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon c r_0}, 0, 0, 0\right) \qquad (C-6-1)$$

ただし、電荷と観測点の四次元座標を、それぞれ

$$r_1=(ct_1, \boldsymbol{r}_1)$$
$$r_2=(ct_2, \boldsymbol{r}_2) \qquad (C-6-2)$$

とすると、

$$r_0=c(t_2-t_1)$$

である。

一方、電荷が速度$\mathbb{V}$'で移動しているようにみえる系Ｓ'は、Ｓにたいして Ｓ'が－$\mathbb{V}$'で移動する場合であるから、(B-3)の Lorentz変換を用いると，

$$P'=UP^tU \qquad (ただし、P=P^t) \qquad (C-6-3)$$

また、Lorentz変換後の四次元座標は、それぞれ、

$$r_1'=(ct_1', \boldsymbol{r}_1')$$
$$r_2'=(ct_2', \boldsymbol{r}_2') \qquad (C-6-4)$$

である。

$$P'=UP^tU=\frac{Q}{4\pi\varepsilon c r_0}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(1, \beta_x, \beta_y, \beta_z) \qquad \left(ただし、\beta_i=\frac{V_i}{c}\right) \qquad (C-6-5)$$

一方，(B－3－10) より、－$\mathbb{V}$'方向の時間変換は、

$$x_0'=\frac{x_0+\beta_i x_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

であるから、逆変換は、当然

$$x_0=\frac{x_0'-\beta_i x_i'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (C-6-6)$$

となる。

（C−6−4）から

$$r_2' - r_1' = (c(t_2' - t_1'),\ \boldsymbol{r}_2' - \boldsymbol{r}_1')$$
$$= (\triangle x_0',\ \triangle x_i')$$
$$= (r',\ \boldsymbol{r}') \qquad (C-6-7)$$

したがって、

$$r_0 = \triangle x_0 = \frac{\triangle x_0' - \beta_i \triangle x_i'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{r' - \dfrac{\boldsymbol{v}'}{c}\boldsymbol{r}'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (C-6-8)$$

これを、（C−6−5）に代入すると、

$$P' = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon c}\ \frac{Q}{r' - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{v}'/c},\ \frac{1}{4\pi\varepsilon c^2}\ \frac{Q\boldsymbol{v}'}{r' - \boldsymbol{r}'\boldsymbol{v}'/c}\right) \qquad (C-6-9)$$

これが、Lienard-Wiechertのポテンシャルである。
このポテンシャルから、電場、磁場を求めると、運動する電荷のつくる電磁場からの電磁波の放出や、シンクロトロン輻射、制動輻射など重要な理論式が速やかに導かれる。

(C-6-8)は、前節の内積の相対論的不変性を用いても簡単に証明される。
S系の四元速度は

(1, 0, 0, 0)　　であるから、これと r_0との内積は
r_0　である。

S'系の四元速度は

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(1,\ \beta_x,\ \beta_y,\ \beta_z)$$ 　　であるから、（C−6−7）との内積は

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(r' - \frac{\boldsymbol{v}'}{c}\boldsymbol{r}'\right)$$

双方は不変量で等しいから

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(r' - \frac{\boldsymbol{v}'}{c}\boldsymbol{r}'\right)$$

このように、（C−6−8）を得ることができる。

Ｃ－７．電磁場の Lagrangianと Hamiltonian

不変量から電磁場の Lagrangianを求める方法を示す。
ただし、本法は定数項の処理については未完成である。

$$P=\frac{\phi}{c}+A_x\sigma_2+A_y\gamma_1+A_z\gamma_3$$

$$D=\frac{\partial}{c\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\sigma_2-\frac{\partial}{\partial y}\gamma_1-\frac{\partial}{\partial z}\gamma_3$$

のとき

$$P^tP=PP^t=\frac{\phi^2}{c^2}-A_x^2-A_y^2-A_z^2$$

$$D^tD=DD^t=\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (C-7-1)$$

であり、それぞれは相対論的不変量である。

Lagrangian Ｌを

$$L=-1/2\mu\cdot DD^tPP^t \qquad (C-7-2)$$

で定義すると、

$$L=-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\phi^2}{c^2}-A_x^2-A_y^2-A_z^2\right)$$

$$=\frac{1}{\mu}\left\{\left(\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{c\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{c\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{c\partial t}\right)^2\right\}$$

$$-\frac{1}{\mu}\left\{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)^2\right\}$$

$$+\varepsilon\phi\square\phi-\mu\mathbb{A}\square\mathbb{A}$$

$$+\text{剰余項}$$

すなわち、(C－1－10) を用いると、

$$L=\varepsilon\mathbb{E}^2-\frac{1}{\mu}\mathbb{B}^2-\phi\rho+\mathbb{A}\mathbb{q}+\text{剰余項} \qquad (C-7-3)$$

と変形できる。

$$
剰余項=-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{c\,\partial t}\right)^2-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)^2-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)^2
$$

$$
\underbrace{-2\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{\partial x}\frac{\partial A_x}{c\,\partial t}+\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{\partial y}\frac{\partial A_y}{c\,\partial t}+\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{\partial z}\frac{\partial A_z}{c\,\partial t}+\frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{\partial A_y}{\partial z}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{(1)}
$$

$$
=-\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{c\,\partial t}+\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{A_y}{\partial y}+\frac{A_z}{\partial z}\right)^2 \cdots\cdots \text{Lorentz条件}=0
$$

$$
+2\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{c\,\partial t}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{c\,\partial t}\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{c\,\partial t}\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)
$$

$-(1)$

すなわち、

$$
剰余項=-\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{\partial x}\frac{\partial A_x}{c\,\partial t}-\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{c\,\partial t}\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)
$$

$$
-\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{\partial y}\frac{\partial A_y}{c\,\partial t}-\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{c\,\partial t}\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)
$$

$$
-\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{\partial z}\frac{\partial A_z}{c\,\partial t}-\frac{\partial\frac{\phi}{c}}{c\,\partial t}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)
$$

$$
-\frac{2}{\mu}\left(\frac{A_z}{\partial y}\frac{A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)-\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)
$$

$$
-\frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)
$$

であるが

$x_0=ct$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$

$A_0=\frac{\phi}{c}$, $A_1=A_x$, $A_2=A_y$, $A_3=A_z$

と書き直すと、

$$剰余項=-\frac{2}{\mu}\sum_{i>j}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_j}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right) \qquad (C-7-4)$$

である。

電磁場の $Lagrangian$ を

$$\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial(\partial A_j/\partial x_i)}-\frac{\partial L}{\partial A_j}=0 \qquad (C-7-5)$$

で定義すると、（C－7－4）の剰余項は、$Lagrangian$ に関係しない量である。

なんとなれば、

i と j は、かならず対で存在しており、

$$L''=\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_j}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

とおくと、 A_i に関しては、

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L''}{\partial(\partial A_j/\partial x_i)}-\frac{\partial L''}{\partial A_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}=\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial L''}{\partial(\partial A_j/\partial x_j)}-\frac{\partial L''}{\partial A_j}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=-\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j\partial x_i}$$

となるから、偏微分の交換性を考慮すると、その和は 0 である。

以上の議論から、（C－7－5）の $Lagrangian$ をとれば、

$$L=\varepsilon\,\mathbb{E}^2-\frac{1}{\mu}\mathbb{B}^2-\phi\rho+\mathbb{A}\,\mathbb{q} \qquad (C-7-6)$$

となるが、実際に正しい $Maxwell$ の方程式を導くには、

$$L=\frac{1}{2}\left(\varepsilon\,\mathbb{E}^2-\frac{1}{\mu}\mathbb{B}^2\right)-\phi\rho+\mathbb{A}\,\mathbb{q} \qquad (C-7-7)$$

でなければならず、最初の定数項だけが異なってくる。

また、剰余項は、この理論からは必ず付随するものであり、その意味を解明してゆかなければならない。

したがって、Ｌｏｒｅｎｔｚ条件まで考慮すると、

結局、われわれのＬａｇｒａｎｇｉａｎは、

$$L' = \frac{\varepsilon}{2}\left(-grad\phi - \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2\mu}(rot\,\mathbb{A})^2 - \phi\rho + \mathbb{A}\mathbb{q} - \frac{1}{2\mu}\left(\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t} + div\,\mathbb{A}\right)^2 - \sum L'' \qquad (C-7-8)$$

一方、Ｈａｍｉｌｔｏｎｉａｎ Ｈは、

$$H = \sum \pi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial t} - L, \qquad \pi_i = \frac{\partial L}{\partial(\partial\psi_i/\partial t)} \qquad (C-7-9)$$

であらわされる。

ここで、ψ_iは一般化された座標、π_iはそれに共役な運動量である。

正準方程式より、

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \pi_i}$$

$$\frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i} \qquad (C-7-10)$$

がなりたつ。

$$\mathbb{P}=\varepsilon\left(grad\phi+\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}\right) \qquad (C-7-11)$$

とおく。

共役な運動量の定義から、

$$\pi_{\phi}=\frac{\partial L'}{\partial(\partial\phi/\partial t)}=-\varepsilon\left(\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}+div\,\mathbb{A}\right)=0$$

$$\pi_{x}=\frac{\partial L'}{\partial(\partial A_x/\partial t)}=-\varepsilon\left(-grad_x\phi-\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)=-\varepsilon E_x$$

$$\pi_{y}=\frac{\partial L'}{\partial(\partial A_y/\partial t)}=-\varepsilon\left(-grad_y\phi-\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)=-\varepsilon E_y$$

$$\pi_{z}=\frac{\partial L'}{\partial(\partial A_z/\partial t)}=-\varepsilon\left(-grad_z\phi-\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)=-\varepsilon E_z$$

（以上、$C-7-12$）

よって Hamiltonianは
$\mathbb{P}$を$\boldsymbol{\pi}$、A_iをψ_iとおいた場合であるから、

$$H=\sum\pi_i\frac{\partial\psi_i}{\partial t}-L'$$

$$=\sum\pi_i\frac{\partial A_i}{\partial t}-L'=\sum\pi_i\left(\frac{\pi_i}{\varepsilon}-grad_i\phi\right)-L'$$

$$=\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{\varepsilon}-(\boldsymbol{\pi}\cdot grad\phi)-L'$$

$$=\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2\varepsilon}+\frac{1}{2\mu}(rot\,\mathbb{A})^2-(\boldsymbol{\pi}\cdot grad\phi)+\phi\rho-\mathbb{A}\mathbb{q}+\sum L'' \qquad (C-7-13)$$

すなわち、
Pを用いると

$$H=\frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{P}^2+\frac{1}{2\mu}(rot\,\mathbb{A})^2-(\mathbb{P}\cdot grad\phi)+\phi\rho-\mathbb{A}\mathbb{q}+\sum L'' \qquad (C-7-14)$$

と書くこともできる。

最後のL''項は正準方程式にも関与しない量である。

なんとなれば、
正準方程式に出てくるのは、$\dfrac{\partial H}{\partial \psi_i}$または$\dfrac{\partial H}{\partial A_i}$だけであるが、

$$\frac{\partial L''}{\partial A_i}=\frac{\partial}{\partial A_i}\sum\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_j}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right)=\sum\left(\frac{\partial^2 A_j}{\partial x_j \partial x_i}-\frac{\partial^2 A_j}{\partial x_i \partial x_j}\right)=0$$

となるからである。A_jについても同様であるから結局 0となる。

以上から正準方程式を解くと、

$$\frac{d\mathbb{A}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \mathbb{P}}=\frac{\mathbb{P}}{\varepsilon}-grad\,\phi=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\varepsilon}-grad\,\phi \qquad (C-7-15)$$

$$\frac{d\mathbb{P}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbb{A}}=-\frac{1}{\mu}rot\,rot\,\mathbb{A}+\mathbb{q} \qquad (C-7-16)$$

（C−7−15）は、（C−7−12）より $\mathbb{E}=-grad\,\phi-\dfrac{\partial \mathbb{A}}{\partial t}$ そのものである。

（C−7−16）は、$rot\,\mathbb{H}=\dfrac{\partial \mathbb{D}}{\partial t}+\mathbb{q}$ の関係を示している。

また、真空の場合は、

$$H=\iiint\left\{\frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{P}^2+\frac{1}{2\mu}(rot\,\mathbb{A})^2-(\mathbb{P}\cdot grad\,\phi)\right\}dv$$

であるが、第3項は、部分積分より、

$$\iiint \mathbb{P}\cdot grad\,\phi\,dv=\iiint\left(E_x\frac{\partial \phi}{\partial x}+E_y\frac{\partial \phi}{\partial y}+E_z\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)dv$$

$$=-\iiint \phi(div\,\mathbb{E})dv=0$$

よって

$$H=\iiint\left(\frac{\varepsilon}{2}\mathbb{E}^2+\frac{1}{2\mu}\mathbb{B}^2\right)dv$$

が得られる。

これらが、ＱＥＤの出発点となる。

C－8．Doppler shift

電磁波の特徴的な現象である Doppler shiftも四次元形式を用いれば、簡単に導出できる。

C－5．で議論したように、角振動数と波数ベクトルの間には、

$$W=\frac{\omega}{c}+k_x\sigma_2+k_y\gamma_1+k_z\gamma_3 \qquad (C-8-1)$$

である。

これは、四次元形式を保持するから、その $Lorentz$ 変換は（B－3－10）に従う。

$$x_0=\frac{\omega}{c}$$

$$x_1=k_x$$

$$x_2=k_y$$

$$x_3=k_z$$

とおいた場合に等しいから

x_0項に関しては

$$\frac{\omega'}{c}=\frac{\frac{\omega}{c}-k_i\beta_i}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\frac{\omega}{c}-\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (C-8-2)$$

波数ベクトルを、単位ベクトル $\mathbf{n}$を使って

$$\mathbf{k}=\frac{\omega}{c}\mathbf{n} \qquad (C-8-3)$$

を代入すると

$$\omega'=\omega\frac{1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (C-8-4)$$

これが、$doppler\ shift$の公式である。

$\boldsymbol{n}$と、$\boldsymbol{v}$の方向が一致する場合は、縦ｄｏｐｐｌｅｒ効果とよばれ

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad (C-8-5)$$

$\boldsymbol{n}$と、$\boldsymbol{v}$の方向が直交する場合は、横ｄｏｐｐｌｅｒ効果とよばれ

$$\omega' = \omega\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (C-8-6)$$

となる。

波数ベクトルについては、（B－3－10）から

$$k_i' = \left\{\delta_{ij} + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\beta_i\beta_j\right\}k_i - \frac{\frac{\omega}{c}\beta_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (C-8-7)$$

となる。

著　者

1957 年　生

1982 年　山口大学医学部　卒

現　在　愛媛労災病院　内科

医学博士

http://www4.justnet.ne.jp/~ichirota/

E-mail : ichirota@shikoku.ne.jp

スピノールによる

特殊相対性理論と電磁気学

1997 年 9 月 30 日　発行

著者，発行：田邊一郎

住所：〒 792 愛媛県新居浜市南小松原町 13-27

TEL 0897 (33) 6191

印刷，製本：山本三省堂